На правах рукописи

ЛЕПСКИЙ Александр Евгеньевич

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ И ВОЗМОЖНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Специальности:
05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
05.13.17 – Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Таганрог – 2008

Работа выполнена в Технологическом институте Южного федерального университета в г. Таганроге

Научный консультант:

Доктор физико-математических наук, профессор А.Н. КАРКИЩЕНКО

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор А.М. НАХУШЕВ
(НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик)

Доктор физико-математических наук, профессор А.И. ЧУЛИЧКОВ
(Московский государственный университет, г. Москва)

Доктор физико-математических наук, профессор А.В. ЯЗЕНИН
(Тверской государственный университет, г. Тверь)

Ведущая организация:
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук

Защита состоится 26 октября 2008 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.208.22 при Южном федеральном университете по адресу: 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44.

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке ЮФУ по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 148.

Автореферат разослан «7» июля 2008 г.

Просим Вас присылать отзыв на автореферат, заверенный гербовой печатью учреждения, по адресу: 347928, г. Таганрог, пер. Некрасовский, 44, диссертационный совет Д 212.208.22.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук, профессор А.Н. Целых

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интенсивное развитие за последние 40 лет технических средств регистрации и обработки изображений привело к бурному росту числа методов и алгоритмов обработки и анализа изображений. По широте используемого математического аппарата эти методы покрывают практически все разделы современной математики. В то же время привлечение разнообразного математического аппарата не всегда сопровождалось качественным анализом разработанных методов и алгоритмов. Как правило, при анализе алгоритмов доминировал статистический подход, выбор параметров алгоритмов осуществлялся путем обучения по выборке образов некоторого класса. Это не всегда позволяло найти качественные аналитические закономерности работы алгоритмов для разных классов изображений, найти оптимальные значений параметров, спрогнозировать результаты работы «похожих» алгоритмов или применение алгоритмов для других классов изображений и т.д. Кроме того, одним из ключевых требований, предъявляемых к методам обработки и анализа изображений, является необходимость учитывать высокую степень неопределенности обрабатываемой графической информации, связанной как с действием внешних факторов (аппаратным зашумлением, оцифровкой и квантованием изображений, перекрытием объектов, наличием бликов, теней и т.д.), так и с необходимостью выделять небольшое число информативных признаков на изображении сложных объектов.

Необходимость выделения информативных признаков объектов на изображении в условиях неопределенности выдвигает на первый план решение следующих задач:

а) разработка робастных к зашумлению методов выделения локальных информативных признаков объектов на изображении;

б) формирование робастных к зашумлению высокоуровневых представлений и описаний изображений объектов, являющихся результатом агрегирования информации о локальных признаках;

в) нахождение минимальных, информативных, устойчивых к зашумлению векторных представлений и описаний изображений;

г) оценка количества неопределенности в том или ином представлении объектов;

д) ранжирование неопределенностей.

Цели и задачи исследования. Целью настоящей диссертационной работы является разработка и анализ робастных к зашумлению методов и алгоритмов выделения низкоуровневых информативных признаков, методов формирования устойчивых к зашумлению высокоуровневых представлений и описаний изображений объектов, развитие математического аппарата, связанного с вычислением количества неопределенности мер информативности и с аппроксимацией таких мер.

В связи с поставленной целью необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать на робастность к зашумлению изображений новые и ранее разработанные локально-интерполяционные методы оценивания кривизны оцифрованной кривой, описать законы распределения вероятностей случайных оценок кривизны.

2. Проанализировать на робастность к зашумлению изображений новые и ранее разработанные методы локально-аппроксимативного подхода к оцениванию кривизны, решить задачу выбора оптимальных значений параметров методов, минимизирующих среднюю ошибку.

3. Исследовать на устойчивость к зашумлению векторные представления и описания кривых, разработать методы нахождения наиболее устойчивых к зашумлению векторных представлений, исследовать меры информативности представлений кривых, агрегирующих локальные оценки кривизны.

4. Аксиоматически ввести и исследовать индексы неточности в классах нижних и верхних вероятностей, предложить способы продолжения индексов неточности на множество всех монотонных мер, рассмотреть применения индекса неточности для исследования мер информативности.

5. Рассмотреть решение задачи аппроксимации меры доверия вероятностной мерой, минимизирующей среднеквадратичную невязку, описать множество тех мер доверия, для которых заданная вероятностная мера является ближайшей в среднеквадратичном.

Методы исследования основаны на использовании теории вероятностей, теории неаддитивных мер, теории неточных вероятностей, теории нечетких множеств, функционального анализа, комбинаторики и комбинаторной геометрии, дифференциальной геометрии, численных методов.

Научная новизна. Данная диссертационная работа вносит существенный вклад в исследование качественных характеристик методов выделения низкоуровневых и формирования высокоуровневых признаков на зашумленных изображениях. Введенный класс стохастических аддитивных усредненных мер информативности позволяет ставить и решать задачи нахождения устойчивых к зашумлению представлений оцифрованной кривой. Найденные описания и свойства индексов неточности монотонных мер открывают принципиально новые возможности для оценок априорной информативности недетерминистских систем, а исследованная проблема аппроксимации мер доверия вероятностными мерами позволяет решать задачу компактного описания векторных представлений и ранжирования возможностей появления событий в тех случаях, когда нижние и верхние вероятности не позволяют однозначно решить задачу ранжирования.

В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Исследован локально-интерполяционный подход к оцениванию кривизны плоской кривой. Оценены систематическая погрешность, смещение и случайная ошибка оценки кривизны при некоррелированном нормальном зашумлении кривой.
2. Разработан и исследован метод усреднения локально-интерполяционных оценок. Найдены оптимальные значения параметров метода.
3. Исследовано вычисление оценки кривизны с помощью свертки первичных локально-интерполяционных оценок со сглаживающим ядром. Оценены смещение и случайная ошибка оценки кривизны, полученная методом сглаживания локально-интерполяционных оценок. Найдены оптимальные значения параметров метода.
4. Исследован локально-аппроксимативный подход к оцениванию кривизны плоской кривой. Найдены значения систематической и случайной ошибок оценки кривизны, полученной локально-аппроксимативным методом при некоррелированном зашумлении кривой.
5. Разработан и исследован метод геометрического сглаживания как модельный метод неявного локально-аппроксимативного подхода к оцениванию кривизны. Найдены систематические ошибки, смещения и случайные ошибки оценок кривизны, полученных этим методом для различных моделей зашумления кривой.
6. Введен и исследован класс усредненных мер информативности по кривизне. Определена усредненная функция информативности кривой относительно данного локального признака изображения. Исследован класс стохастических аддитивных усредненных мер информативности в случае вероятностного зашумления кривой. Решена задача нахождения полигонального представления кривой, ограниченной мощности, минимизирующего дисперсию стохастической меры информативности.
7. Исследована неаддитивная (монотонная) усредненная стохастическая мера информативности при аддитивном стационарном некоррелированном зашумлении дискретной кривой. Найдены асимптотические выражения для смещения и случайной ошибки стохастической

меры информативности по длине. Поставлена и решена задача нахождения полигонального представления, наиболее устойчивого относительно меры информативности по длине.
8. Поставлена и исследована задача нахождения полигонального представления кривой, состоящего из всех таких точек, информативные признаки которых удовлетворяют определенным нечетким отношениям близости и различия.
9. Оценены величины изменение векторных характеристик представлений и описаний дискретной кривой при изменении информативности контрольных точек. Получены вероятностные оценки изменения центра масс векторного представления кривой, подвергнутой стационарному некоррелированному зашумлению.
10. В рамках исследования степени неточности мер информативности, аксиоматически введены и описаны линейные индексы неточности в классе нижних (верхних) вероятностей. Предложен и исследован один способ продолжения индекса неточности на множество всех монотонных мер. Рассмотрен индекс неточности меры информативности по длине.
11. Решена задача аппроксимации меры доверия вероятностной мерой, минимизирующей среднеквадратичную невязку. Получены различные представления ближайшей вероятностной меры. Показано, что понятие «ближайшей» меры можно использовать для ранжирования возможностей появления событий в тех случаях, когда нижние и верхние вероятности не позволяют однозначно решить задачу ранжирования. Исследованы алгебраические, спектральные и аппроксимативные свойства преобразования, ставящего в соответствие мере доверия ближайшую в среднеквадратичном вероятностную меру.
12. Решена обратная задача вероятностной аппроксимации: найдено множество тех мер доверия, для которых заданная вероятностная мера является ближайшей в среднеквадратичном. Найдено семейство экстремальных точек выпуклого класса ближайших мер доверия и рассмотрены некоторые применения найденных описаний в теории игр.

Практическая ценность работы состоит в использовании найденных качественных характеристик базовых методов и алгоритмов выделения низкоуровневых признаков зашумленных оцифрованных кривых для анализа закономерностей работы алгоритмов в случае разных классов изображений, нахождения оптимальных значений параметров, прогнозирования работы «похожих» алгоритмов или применения алгоритмов для других классов изображений и т.д. Найденные оценки изменения векторных представлений и описаний при изменении информативности контрольных точек могут быть использованы при формировании устойчивых представлений и описаний кривых. Разработанные усредненные, в том числе стохастические меры информативности позволяют организовать вычислительно эффективные процедуры обработки информации, в том числе графической, за счет адекватного моделирования неопределенности. Предложенная аксиоматика и различные описания индекса неточности позволяют оценивать априорную неопределенность недетерминистских систем.

Реализация результатов работы. Некоторые методы и алгоритмы выделения низкоуровневых признаков изображений и формирования векторных представлений были реализованы в макете программного комплекса по обработке изображений. Отдельные положения диссертационной работы внедрены в учебный процесс в Таганрогском технологическом институте Южного федерального университета.

Ряд результатов диссертационной работы получен при выполнении 4-х грантов РФФИ (98-01-00013-а, 07-07-00067-а, 07-07-08036-з, 08-07-00129-а).

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на Всероссийской научно-технической конференции «Интеллектуальные САПР» CAD (п. Дивноморское, 1997, 1998, 2002), на Всероссийской научно-технической конференции с международным участием "Компьютерные технологии в инженерной и управленческой деятельности» (Таганрог, 1999), на VI Международной конференции «Радиолокация, навигация, связь» (Воронеж, 2000), на Всероссийских симпозиумах по прикладной и промышленной математике (1999, 2000, 2001, 2002), на Международной научной конференции «Искусственный интеллект» (п. Кацивели, 2000), на Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием КИИ (Переславль-Залесский, 2000), на Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям SCM (Санкт Петербург, 2000), на Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение» DSPA (Москва, 2000, 2002), на Международном научно-практическом семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (Коломна, 2001, 2003), на Международном конгрессе «Искусственный интеллект в XXI веке» (п. Дивноморское, 2001), на I Международном семинаре по мягким методам в вероятности и статистике SMPS (Варшава, 2002), на Международном конгрессе ассоциации нечетких систем IFSA (Турция, 2003), на 11-й Международной конференции по обработке информации и управлению в неопределенных экспертных системах IPMU (Париж, 2006), на Всероссийской научной конференции по нечетким системам и мягким вычислениям НСМВ (Тверь, 2006), на IX Международной конференции “Интеллектуальные системы и компьютерные науки” (Москва, 2006), на восьмой Международной научно-технической конференции «Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы» (Донецк, 2007), на 5-м Международном симпозиуме по неточным вероятностям и их применениям ISIPTA (Прага, 2007), на 5-й конференции Европейского сообщества по нечеткой логике и технологиям EUSFLAT (Острава, 2007), на конференции Северо-Американского общества по обработке нечеткой информации NAFIPS (Нью-Йорк, 2008).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 42 печатные работы, из них 17 работ - в изданиях рекомендованных ВАК. Кроме того, результаты исследований отражены в 5-ти отчетах о НИР.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти тематических глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем основного текста – 349 стр., включая 19 рисунков и 10 таблиц. Список литературы изложен на 14 стр. и содержит 153 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава диссертации посвящена исследованию локально-интерполяционных оценок кривизны.

Если Γ гладкая кривая, то ее кривизна $k(\mathbf{g})$ в точке $\mathbf{g}\in\Gamma$ может быть определена как производная $\theta'_s(\mathbf{g})$ функции наклона $\theta(\mathbf{g})$ (угол между касательной и положительным направлением оси Ox) по длине дуги s.

Реально имеется только дискретная кривая Γ, выделенная тем или иным методом на оцифрованном изображении. Поэтому вместо вычисления кривизны $k(\mathbf{g})$ вычисляют некоторую ее оценку $k_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{g})$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор параметров. Простейшую оценку можно получить, если перейти в определении кривизны от производных к конечным разностям. Среди параметров оценки кривизны одним из важнейших является положительный параметр (будем обозначать его через ε), характеризующий величину окрестности $U_\varepsilon(\mathbf{g})$ с центром в точке $\mathbf{g}$, в пределах которой вычисляется оценка, либо в пределах которой наиболее значимы для вычисления оценки точки кривой. Зависимость оценки кривизны от параметра ε будем обозначать через $k_\varepsilon(\mathbf{g})$.

Любая $\boldsymbol{\varepsilon}$-оценка кривизны $k_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{g})$ оцифрованной кривой Γ в точке $\mathbf{g}$ характеризуется некоторыми качественными величинами. Одной из важнейших качественных величин является разность $s_\varepsilon = |k_\varepsilon - k|$, называемая *систематической ошибкой* и характеризующая величину отклонения оценки от точного значения. Будем считать, что систематическая ошибка обусловлена только неточностью метода вычисления оценки. Если рассматривать зависимость систематической ошибки от величины ε-окрестности вычисления оценки, то потребуем, чтобы выполнялось условие: 1) для гладкой кривой $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} s_\varepsilon(\mathbf{g}) = 0$. Кроме того, как правило, изображение, на котором выделяется кривая, является зашумленным. Характер неточности зашумления может быть разным. Ниже будем считать, что неточность имеет аддитивный вероятностный характер. Тогда оценка кривизны будет случайной величиной $K_\varepsilon(\mathbf{g})$, которая качественно характеризуется величиной *смещения* $b_\varepsilon = |\mathbf{E}[K_\varepsilon] - k_\varepsilon|$, где $\mathbf{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания, и величиной *случайной ошибки* (дисперсии) $\boldsymbol{\sigma}^2[K_\varepsilon]$. Потребуем, чтобы для случайной оценки кривизны $K_\varepsilon(\mathbf{g})$ также выполнялись условия: 2) $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} |\mathbf{E}[K_\varepsilon] - k_\varepsilon| = 0$; 3) $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \boldsymbol{\sigma}^2[K_\varepsilon] = 0$, которые назовем условиями *устойчивости оценки кривизны* к зашумлению изображения. Если $\boldsymbol{\sigma}^2[K_\varepsilon] = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $|\mathbf{E}[K_\varepsilon] - k_\varepsilon| = O(\varepsilon^{-\beta})$, то величина $\min\{\alpha/2, \beta\}$ определяет *порядок устойчивости* оценки кривизны.

Можно выделить два основных подхода к вычислению оценок функции кривизны. В первом подходе вычисление оценки кривизны оцифрованной кривой Γ в точке $\mathbf{g} \in \Gamma$ осуществляется в два этапа. Сначала с помощью разностного оператора кривизны находятся первичные оценки в некоторых точках кривой из ε-окрестности с центром в точке $\mathbf{g}$. Затем осуществляется усреднение (сглаживание) полученных первичных оценок. Во втором подходе осуществляется гладкая аппроксимация дискретной кривой Γ, после чего вычисляется кривизна гладкой аппроксимирующей кривой в исследуемой точке. Вычисление оценки кривизны только с помощью разностных операторов практически не применяется, поскольку такая оценка будет очень чувствительной к значениям отдельных данных. Для того чтобы уменьшить эту чувствительность осуществляют усреднение (сглаживание) полученных в пределах ε-окрестности первичных оценок кривизны. Из всего многообразия процедур усреднения (сглаживания) можно выделить два основных способа. В первом случае вычисляются первичные оценки кривизны в одной точке $\mathbf{g}$, но с разными шагами интерполяции в пределах ε-окрестности, после чего осуществляется усреднение полученных оценок. В другом способе сглаживаются первичные оценки кривизны, вычисленные в разных точках ε-окрестности. Такую схему сглаживания можно реализовать с помощью интегрального оператора свертки разностных оценок кривизны и некоторого сглаживающего ядра. В качестве сглаживающих ядер чаще всего используется постоянное ядро (равномерное усреднение) или ядро Гаусса. Математической основой построения сглаживающего оператора является известное в теории приближений усреднение функций по Соболеву. Применение оператора сглаживания для выделения низкоуровневых признаков на изображении впервые было тспользовано J. Canny при построения детектора края. Позднее методика Canny была применена для вычисления оценок кривизны. Для того чтобы различать два указанных способа усреднения, первый способ будем называть собственно усреднением, а второй – сглаживанием.

Для «хороших» оценок и правильно найденных значений параметров все три качественные характеристики-критерии (смещение, систематическая и случайная ошибки) должны быть небольшими. Задача нахождения векторного параметра $\boldsymbol{\varepsilon}$, при котором минимизируются несколько критериев, является многокритериальной задачей. Один из путей решения такой задачи – минимизировать «свертку» критериев, например, их сумму или минимизировать так называемую *среднеквадратичную ошибку* $s_\varepsilon^2 + b_\varepsilon^2 + \boldsymbol{\sigma}^2[K_\varepsilon]$.

Таким образом, для заданного метода вычисления оценки кривизны возникают следующие задачи:

а) найти значения (или оценки) трёх качественных характеристик оценок кривизны;

б) оценить вычислительную трудоемкость нахождения оценок;

в) найти оптимальное значение векторного параметра $\boldsymbol{\varepsilon}$, минимизирующего среднеквадратичную ошибку.

В разделе 1.2 напоминаются необходимые сведения из дифференциальной геометрии кривых, определяются классы рассматриваемых кривых и типы вероятностных зашумлений кривых.

В разделе 1.3. исследуются оценки кривизны, полученные методом локальной интерполяции оцифрованной кривой. Пусть плоская элементарная кривая Γ задана в явном виде функцией $y = y(x)$ и рассматривается в пределах некоторого «m-окна» начала координат: $-m \le x \le m$. Если кривая Γ является регулярной, то ее кривизна вычисляется по формуле $k = y''(0) \big/ (1+(y'(0))^2)^{3/2}$. На самом деле мы имеем дискретную кривую. В разделе 1.3 рассматривается дискретная кривая $\Gamma \in C_d^{(0)}$, заданная в “окне” $[-m,m]$, т.е. $\Gamma = \Gamma_m = \{(s, y_s)\}_{s=-m}^{m}$. Кривизна оценивается в точке $s = 0$. Простейший способ это сделать – построить интерполяционный многочлен, проходящий через точки $\{(s, y_s)\}_{s=-m}^{m}$, то есть осуществить локальную интерполяцию оцифрованной кривой. Оценкой кривизны $k_m^{(1)}$ тогда можно считать кривизну интерполяционного многочлена в данной точке. Такой подход был реализован, например, в алгоритме Bennet и MacDonald. Интерполирование окружностью рассматривалось в алгоритме Chetverikov и Szabó. Кроме того, во многих детекторах углов и алгоритмах сегментации кривых используется так называемая мера расстояния между хордой и стягиваемой ее дугой кривой. В главе 1 показано, что эта мера связана с радиусом интерполирующей окружности. Поэтому все методы детекции углов и сегментации кривых, основанные на вычислении этой меры, можно отнести к методам первого подхода. В частности, мера расстояния между хордой и стягиваемой ее дугой использовалась в таких популярных алгоритмах, как в алгоритме Douglas-Peucker, алгоритме Rutkowski и Rosenfeld, в алгоритме Ramer и др.

Рассмотрим интерполяционный многочлен Лагранжа $P_{2m}(x;\mathbf{y}) = \sum_{s=-m}^{m} y_s l_s(x)$, проходящий через точки $\{(s, y_s)\}_{s=-m}^{m}$, $\mathbf{y} = (y_s)$, где $l_s(x) = \prod_{i=-m}^{m}{}^{(s)}(x-i) \Big/ \prod_{i=-m}^{m}{}^{(s)}(s-i)$ и знак $\prod_i^{(s)}$ означает, что в указанном произведении пропущен множитель при $i = s$. Тогда $k_m^{(1)} = k_m^{(1)}(\mathbf{y}) = P''_{2m}(0;\mathbf{y})\left(1+(P'_{2m}(0;\mathbf{y}))^2\right)^{-3/2} = (\mathbf{b}(m),\mathbf{y})\left(1+(\mathbf{a}(m),\mathbf{y})^2\right)^{-3/2}$ – оценка кривизны, где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(m) = \left(l'_{-m}(0),\dots,l'_m(0)\right)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(m) = \left(l''_{-m}(0),\dots,l''_m(0)\right)$.

Для систематической ошибки оценки кривизны кривой $y(x)$ класса C^{2m+1} имеем $\left|k_m^{(1)} - k(0)\right| \le \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\left(\left(\frac{3}{2}|q_2|+1\right)\left|y^{(2m+1)}(c)\right| + \left|c' y^{(2m+2)}(c)\right|\right)$, $c(x) \in (-m,m)$ и $|q_2| \le \|\mathbf{b}(m)\|\|\mathbf{y}\| + \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\left|y^{(2m+1)}(c) + c' y^{(2m+2)}(c)\right|$. В частности, если координаты вектора $\mathbf{y}$ значений оцифрованной кривой равномерно по m ограничены, а кривая $y(x)$ имеет равномерно ограниченные по области и по m производные, то систематическая ошибка s_m не больше, чем малая $O(4^{-m})$.

Предположим теперь, что точечные значения $\{(s, y_s)\}_{s=-m}^{m}$ кривой подвергнуты аддитивному некоррелированному стационарному нормальному зашумлению $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$, т.е. имеется последовательность $\{(s, Y_s)\}_{s=-m}^{m}$, где $\mathbf{Y} = (Y_{-m},...,Y_m)$ – вектор нормально распределенных некоррелированных случайных величин $Y_s = y_s + \xi_s$, $\xi_s \sim N(0,\sigma^2)$, $s = -m,...,m$. Тогда оценка кривизны

$$K_m^{(1)}(\mathbf{y}) = k_m^{(1)}(\mathbf{Y}) = (\mathbf{b}(m), \mathbf{Y})(1 + (\mathbf{a}(m), \mathbf{Y})^2)^{-3/2} \qquad (1)$$

– случайная величина. Пусть $\mathbf{v}^{(0)}$ - проекция вектора $\mathbf{v} \in R^{2m+1}$ на R^{2m}.

Теорема 1.1. *Плотность распределения вероятностей случайной величины* $K_m^{(1)}$ *при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ *равна*

$$g_{K_m^{(1)}}(t;\mathbf{y}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{2m+1}|b_0|} \int\limits_{R^{2m}} (1 + (\mathbf{a}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)})^2)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\tfrac{1}{2\sigma^2}\left((\mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{y}^{(0)})^2 + (\psi(\mathbf{v}^{(0)}, t) - y_0)^2\right)\right) d\mathbf{v}^{(0)},$$

где $\psi(\mathbf{v}^{(0)}, t) = \frac{1}{b_0}\left(t(1 + (\mathbf{a}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)})^2)^{\frac{3}{2}} - (\mathbf{b}^{(0)}, \mathbf{v}^{(0)})\right)$.

Смещение и случайная ошибка оценки кривизны найдены для m*-локально четной* точечной функции $\{(s, y_s)\}_{s=-m}^{m}$, т.е. $y_{-s} = y_s$ для всех $s = -m,...,m$. Так как $a_{-s} = -a_s$ и $b_{-s} = b_s$, то в этом случае $(\mathbf{a}, \mathbf{y}) = 0$ и $k_m^{(1)} = (\mathbf{b}, \mathbf{y}) = l_0''(0) y_0 + 2\sum_{s=1}^{m} l_s''(0) y_s$.

Теорема 1.2. *Для смещения* $b(K_m^{(1)})$ *случайной оценки кривизны* m*-локально четной функции, полученной методом локального интерполирования по формуле (1) при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$*, справедливо неравенство*

$$\tfrac{3}{2}\|\mathbf{a}\|^2 \sigma^2 \left|k_m^{(1)}\right| \max\left\{0; 1 - \tfrac{15}{4}\|\mathbf{a}\|^2 \sigma^2\right\} \le \left|b(K_m^{(1)})\right| \le \left|k_m^{(1)}\right| \left(1 - \frac{\left(3a_1^2\sigma^2+1\right)^{m-1}}{\left(3\|\mathbf{a}\|^2\sigma^2+1\right)^{m-0.5}}\right).$$

Следствие 1.2. *При тех же условиях и* $\sigma \to 0$ *имеем*

$$\left|b(K_m^{(1)})\right| = \tfrac{3}{2}\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \left|k_m^{(1)}\right| \sigma^2 + o(\sigma^2).$$

Последняя теорема и следствие показывают, что смещение оценки $k_m^{(1)}$ мало зависит от размера «окна» m и является малой одного порядка с дисперсией зашумления.

Теорема 1.3. *Для случайной ошибки оценки кривизны (1), полученной методом локальной интерполяции* m*-локально четной оцифрованной кривой при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ *справедливо неравенство*

$$\boldsymbol{\sigma}^2[K_m^{(1)}] \ge \tfrac{9}{2}\left(k_m^{(1)}\right)^2 \left(\|\mathbf{a}\|^4 \sigma^4 - 15\|\mathbf{a}\|^6 \sigma^6 + o(\sigma^6)\right) + \sigma^2 \frac{\left(6a_1^2\sigma^2+1\right)^{m-1}}{\left(6\|\mathbf{a}\|^2\sigma^2+1\right)^{m+0.5}} \left(6a_1^2\sigma^2\left(4\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2\right) + \|\mathbf{b}\|^2\right).$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы: при некоррелированном нормальном зашумлении оцифрованной кривой оценка случайной кривизны $k_m^{(1)}$, полученная методом интерполирования в «окне» $[-m, m]$, имеет: 1) систематическую ошибку, которая может быть сколь угодно уменьшена при увеличении размера окна m; 2) смещение, которое мало зависит от размера «окна» m и является малой одного порядка с дисперсией зашумления; 3) случайную ошибку, которая не может быть уменьшена при увеличении размера окна m.

В разделе 1.4 рассматривается усреднение первичных оценок кривизны, найденных в одной точке, но для разных значений шагов интерполяции в пределах «окна» размером m. Предположим, что известны точечные значения $\{(s, y_s)\}_{s=-m}^{m}$ оцифрованной плоской кривой, заданные в “окне” $[-m,m]$. Рассмотрим следующую схему оценивания кривизны в точке $s=0$.

1) Для всех $l=1,...,m$ построим интерполяционный многочлен $P_{l,2m}(x;\mathbf{y})$ второго порядка, проходящий через точки (s,y_s), $s=-l,0,l$. Найдем оценки кривизны $k_{l,m}^{(1)}(\mathbf{y})$ в точке $s=0$, как кривизны многочленов $P_{l,2m}(x;\mathbf{y})$.

2) Вычислим $\boldsymbol{\alpha}$-усредненную оценку кривизны $\tilde{k}_m^{(1)}(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})=\sum_{l=1}^m \alpha_l k_{l,m}^{(1)}(\mathbf{y})$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_m)$, где неотрицательные коэффициенты α_l, $l=1,...,m$, – веса усреднения должны удовлетворять условию $\sum_{l=1}^m \alpha_l=1$.

Такое усреднение использовалось, например, в алгоритмах Freeman и Davis, Beus и Tiu. Для простоты исследуется упрощенная оценка кривизны $\tilde{k}_m^{(2)}(\mathbf{y})$, полученная методом $\boldsymbol{\alpha}$-усреднения локально-интерполяционных оценок. Пусть точечная функция $\{(s,y_s)\}_{s=-m}^m$ является m-локально четной, т.е. $y_{-s}=y_s$ для всех $s=-m,...,m$. Тогда $\Delta y_l=0$, $l=1,...,m$. Поэтому $k_{l,m}^{(2)}(\mathbf{y})=P''_{l,2m}(0;\mathbf{y})=\Delta^2 y_l/l^2$ и $\tilde{k}_m^{(2)}(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})=\sum_{l=1}^m \alpha_l k_{l,m}^{(1)}(\mathbf{y})=\ \sum_{l=1}^m \alpha_l \Delta^2 y_l/l^2$. Тогда систематическая ошибка будет равна $s\left(\tilde{k}_m^{(2)}\right)=\frac{1}{3}\left|y'''(x^*)\right|\sum_{l=1}^m \alpha_l l$, $x^*\in[0,m]$, и не может быть сколь угодно уменьшена. Предположим, что точечные значения $\mathbf{y}$ подвергнуты аддитивному сферическому нормальному зашумлению $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$: $\mathbf{Y}=\mathbf{y}+\boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2 I)$. Тогда оценка кривизны, полученная методом усреднения локально-интерполяционных оценок будет случайной величиной $\tilde{K}_m^{(2)}$ и $\boldsymbol{\sigma}^2[\tilde{K}_m^{(2)}]=\ 4\sigma^2\left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{l^4}\alpha_l^2+\left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l^2}\alpha_l\right)^2\right]$. В частности, при равномерном усреднении (т.е. $\alpha_l=1/m$ для всех $l=1,...,m$) имеем $\boldsymbol{\sigma}^2[\tilde{K}_m^{(2)}]\le 7\pi^4\sigma^2\big/\left(45(m+1)^2\right)$ и, таким образом, случайная ошибка является уменьшаемой при увеличении размера окна m. В случае равномерного усреднения рассматривается задача о нахождении оптимального размера окна m, при котором среднеквадратичная ошибка $S(m)=s_m^2\left(\tilde{k}_m^{(2)}\right)+\boldsymbol{\sigma}^2[\tilde{K}_m^{(2)}]$ будет наименьшей. Оптимальное значение m_{opt} размера окна должно удовлетворять условию $m_{opt}=\left[\pi\sqrt{\frac{12}{5}\sigma\left|y'''(x^*)\right|^{-1}}\right]-1$, при этом $S(m_{opt})=\frac{71}{540}\pi^2\sigma\left|y'''(x^*)\right|$. Предлагается процедура уточнения размера «окна» m при вычислении оценки кривизны методом усреднения локально-интерполяционных оценок.

В случае произвольного $\boldsymbol{\alpha}$-усреднения рассматривается задача о нахождении такого оптимального весового вектора $\boldsymbol{\alpha}$, при котором среднеквадратичная ошибка $S(\boldsymbol{\alpha})=s_m^2\left(\tilde{k}_m^{(2)}(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})\right)+\boldsymbol{\sigma}^2[\tilde{K}_m^{(2)}(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})]$ будет наименьшей. Тогда $S(\boldsymbol{\alpha})=4\sigma^2\tilde{S}(\boldsymbol{\alpha})$, где

$$\tilde{S}(\boldsymbol{\alpha})=T^2\left(\sum_{l=1}^m \alpha_l l\right)^2+\left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{l^4}\alpha_l^2+\left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{l^2}\alpha_l\right)^2\right],\ T=\frac{1}{6\sigma}\left|y'''(x^*)\right|.$$

Теорема 1.4. *Вектор весовых коэффициентов* $\boldsymbol{\alpha}$, *минимизирующий среднеквадратичную ошибку* $s_m^2\left(\tilde{k}_m^{(2)}(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})\right)+\boldsymbol{\sigma}^2[\tilde{K}_m^{(2)}(\mathbf{y};\boldsymbol{\alpha})]$ *является точкой минимума квадратичной функции* $\tilde{S}(\boldsymbol{\alpha})$ *в симплексе* $\alpha_l\ge 0$, $l=1,...,m$, $\sum_{l=1}^m \alpha_l=1$.

Таким образом, можно сделать следующие выводы: при некоррелированном нормальном зашумлении оцифрованной кривой оценка кривизны $\tilde{k}_m^{(2)}(\mathbf{y})$, полученная методом усреднения локально-интерполяционных оценок в «окне» $[-m,m]$, имеет: 1) систематическую ошибку $s\left(\tilde{k}_m^{(2)}\right)=(m+1)\left|y'''(x^*)\right|/6$, которая не может быть сколь угодно уменьшена при изменении размера окна m; 2) случайную ошибку $\boldsymbol{\sigma}^2[\tilde{K}_m^{(2)}]\le 7\pi^4\sigma^2/(45m^2)$, которая может быть сколь угодно уменьшена при увеличении размера окна m (порядок устойчивости – не меньше 1); 3) оптимальный размер окна (в общем случае, оптимальные весовые коэффициенты), при котором среднеквадратичная ошибка вычисления оценки кривизны будет наименьшей.

В разделе 1.5 рассматривается вычисление оценок кривизны методом аналитического сглаживания первичных локально-интерполяционных оценок. Такой подход был предложен Canny для выделения краев на изображении. В качестве оценки $k_\varepsilon(\mathbf{g})$ кривизны плоской оцифрованной кривой Γ в точке $\mathbf{g}$ используется результат ε-усреднения (по Соболеву) самой функции кривизны $k(\mathbf{g})$ (или ее оценки, полученной тем или иным методом) с помощью интегрального оператора свертки:

$$k_\varepsilon(\mathbf{g})=L_\varepsilon[k](\mathbf{g})=(\varphi_\varepsilon * k)(\mathbf{g})=(\varphi_\varepsilon * \theta_s')(\mathbf{g})=(\varphi_\varepsilon' * \theta)(\mathbf{g})=\tilde{L}_\varepsilon[\theta](\mathbf{g}),$$

где φ_ε – некоторое ядро усреднения, $\theta(\mathbf{g})$ - угол между касательной и положительным направлением оси Ox, $\theta_s'(\mathbf{g})$ - производная функции наклона $\theta(\mathbf{g})$ по длине дуги s. Пусть $\left(\tau_i\right)_{i=0}^{n-1}$ – некоторое разбиение отрезка $[t-\varepsilon,t+\varepsilon]\subseteq[0,L]$ (L – длина кривой Γ), $\Delta\tau_i$ – i-й шаг разбиения, $\tilde{k}(\tau_i)$ - дискретная функция локально-интерполяционных оценок кривизны в точках τ_i, $i=0,1,...,n-1$. Будем считать, что $\tilde{k}(\tau_i)=\frac{1}{\Delta\tau_i}\left(\tilde{\theta}(\tau_{i+1})-\tilde{\theta}(\tau_i)\right)$, где $\tilde{\theta}(\tau_i)$ – оценки функции наклона в точках τ_i. Выполним ε-усреднение функции $\tilde{k}$ – получим оценку

$$\tilde{k}_\varepsilon(t)=\tfrac{1}{\varepsilon}\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}c_i\tilde{k}(\tau_i)\varphi\left(\tfrac{t-\tau_i}{\varepsilon}\right)=\tfrac{1}{\varepsilon^2}\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}c_i\tilde{\theta}(\tau_i)\varphi'\left(\tfrac{t-\tau_i}{\varepsilon}\right),$$

где c_i – весовые множители квадратурной формулы. Для систематической ошибки кривизны справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Для систематической ошибки аналитического $\varepsilon-$сглаживания первичных оценок кривизны верна оценка*

$$s_\varepsilon=\left|\tilde{k}_\varepsilon(t)-k(t)\right|\le C_1(\varepsilon,\Gamma)\varepsilon+\tfrac{1}{\varepsilon n}C_2(\varepsilon,\Gamma)+C_3(\varepsilon,\Gamma)\left(\tfrac{\varepsilon}{n}\right)^q,\ \varepsilon>0,$$

где q – порядок точности численного интегрирования, n – число точек разбиения, $C_i(\varepsilon,\Gamma)$, $i=1,2,3$, – ограниченные сверху по ε константы. В частности, если $n=O\left(1/\varepsilon^2\right)$, то $s_\varepsilon=\left|\tilde{k}_\varepsilon(t)-k(t)\right|\le C(\varepsilon,\Gamma)\varepsilon$, $\varepsilon>0$, где константа $C(\varepsilon,\Gamma)$ ограничена сверху по ε.

Пусть Γ – плоская кривая, имеющая естественную параметризацию $\mathbf{w}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$. Рассмотрим дискретизацию Γ_d этой кривой: $\Gamma_d=\left(\mathbf{w}(t_k)\right)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{w}(t_k)=x_k\mathbf{i}+y_k\mathbf{j}$. Предположим, что дискретная кривая Γ_d подвергнута аддитивному сферическому нормальному зашумлению $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ вида $\mathbf{Y}=\mathbf{y}+\boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}\sim N(\mathbf{0},\sigma^2 I)$. Тогда аналитическое $\varepsilon-$сглаживание локально-интерполяционных оценок $\tilde{k}$ кривизны k кривой Γ в точке $\mathbf{g}=\mathbf{w}(t)$ будет случайной величиной, которую обозначим через K_ε. В случае вероятностного зашумления кривой для тех индексов $i=0,1,...,n-1$, для которых $\Delta x_i\ne 0$, первичные оценки функции наклона будут случайными величинами Θ_i, а $\varepsilon-$сглаживание локально-интерполяционных оценок – случайной величиной $K_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\varepsilon)\Theta_i$, где $c_i(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\varphi'\left(\frac{t-\tau_i}{\varepsilon}\right)$.

Лемма 1.8. *Плотность распределения случайной величины* $\Theta_i = arctg\left(\left(Y_{i+1} - Y_i\right)/\Delta x_i\right)$, $\Delta x_i \neq 0$, $Y_i \sim N(y_i, \sigma^2)$, $i = 0,1,...,n-1$, *равна*

$$g_{\tilde{\theta}_i}(t) = \frac{|\Delta x_i|}{2\sqrt{\pi}\sigma\cos^2 t}\exp\left(-\frac{\Delta x_i^2}{4\sigma^2}(tgt - tg\tilde{\theta}_i)^2\right),\ -\tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{\pi}{2},\ \tilde{\theta}_i = arctg(\Delta y_i / \Delta x_i).$$

Теорема 1.6. *Смещение случайной величины* $K_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\varepsilon)\Theta_i$ $\varepsilon-$*сглаживания локально-интерполяционных оценок при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ *равно*

$$b(K_\varepsilon) = -2\sigma^2 \sum_{\substack{i=0,\\ \Delta x_i \neq 0}}^{n-1} \frac{1}{\Delta x_i^2} c_i(\varepsilon)\sin\tilde{\theta}_i\cos^3\tilde{\theta}_i + R\text{, где } |R| \le \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \sum_{\substack{i=0\\ \Delta x_i \neq 0}}^{n-1} |c_i(\varepsilon)| \left(\frac{\sigma}{|\Delta x_i|}\right)^3.$$

Лемма 1.11. *Плотность распределения системы случайных величин* $\left(\Theta_i, \Theta_{i+1}\right)$, $\Theta_i = arctg\left(\left(Y_{i+1} - Y_i\right)/\Delta x_i\right)$, $\Delta x_i \neq 0$, $Y_i \sim N(y_i, \sigma^2)$, *равна*

$$g_{\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_{i+1}}(s,t) = \frac{|\Delta x_i \Delta x_{i+1}|}{2\sqrt{3}\pi\sigma^2\cos^2 t\cos^2 s}\exp\left(-\frac{1}{3\sigma^2}B(\Delta y_i - \Delta x_i tgs, \Delta y_{i+1} - \Delta x_{i+1} tgt)\right),\ -\tfrac{\pi}{2} < s,t < \tfrac{\pi}{2},$$

где $B(u,v) = u^2 + uv + v^2$.

Теорема 1.7. *Случайная ошибка величины* $K_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\varepsilon)\Theta_i$ $\varepsilon-$*сглаживания локально-интерполяционных оценок при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ *равна*

$$\boldsymbol{\sigma}^2\left[K_\varepsilon\right] = \sigma^2 \sum_{\substack{i=0,\\ \Delta x_i \neq 0}}^{n} \left(b_i^2(\varepsilon) - b_i(\varepsilon)b_{i-1}(\varepsilon) + b_{i-1}^2(\varepsilon)\right) + H,$$

где $b_i(\varepsilon) = \frac{c_i(\varepsilon)}{|\Delta x_i|}\cos^2\tilde{\theta}_i$, $i = 0,1,...,n-1$, $b_{-1}(\varepsilon) = b_n(\varepsilon) = 0$, *причем* $H = O(\sigma^4)$.

Если $\left(\tau_i\right)_{i=0}^{n-1} \subset \left(t_k\right)_{k=0}^{p-1}$ – равномерное разбиение отрезка $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, $\Delta\tau_i = 2\varepsilon/n$, то $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = (2\varepsilon\, tg\alpha_i)/n$, $tg\alpha_i = (x_{i+1} - x_i)/\Delta\tau_i$ и справедливо следствие.

Следствие 1.4. *При указанных условиях случайная ошибка величины* K_ε *аналитического* $\varepsilon-$*сглаживания локально-интерполяционных оценок в случае зашумления* $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ *равна* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[K_\varepsilon\right] = C_5(\varepsilon,\Gamma)\left(\frac{\sigma n}{\varepsilon}\right)^2 + H$, *где* $|H| \le \tilde{C}_5(\varepsilon,\Gamma)\left(\frac{\sigma n}{\varepsilon}\right)^4$ *и константы* $C_5(\varepsilon,\Gamma)$, $\tilde{C}_5(\varepsilon,\Gamma)$, *ограничены по* ε.

Таким образом, можно сделать следующие выводы: при некоррелированном нормальном зашумлении оцифрованной кривой Γ оценка кривизны $\tilde{k}_\varepsilon(t)$, полученная методом аналитического $\varepsilon-$сглаживания локально-интерполяционных оценок в окне $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, имеет: 1) систематическую ошибку, которая может быть сделана сколь угодно малой с уменьшением ε; 2) смещение и случайную ошибку, которые можно уменьшить за счет увеличения размера окна ε или за счет уменьшения числа локально-интерполяционных оценок n; 3) оптимальные значения размера сглаживающего окна ε и числа первичных оценок кривизны n, при которых суммарная ошибка вычисления оценки кривизны методом аналитического сглаживания будет наименьшей.

Во второй главе диссертации исследуется локально-аппроксимативный подход к вычислению оценок кривизны. В этом случае оператор вычисления оценки кривизны $\tilde{C}$, определенный на множестве всех оцифрованных кривых $C_d(Z^2)$ имеет вид $\tilde{C} = C \circ A$, где $A: C_d(Z^2) \to C^1(R^2)$ – некоторый оператор гладкой аппроксимации дискретной кривой в окрестности той точки, в которой кривизна оценивается, C – оператор вычисления кривизны, заданный на множестве гладких кривых $C^1(R^2)$. Аппроксимация может быть явной и неявной. В явной аппроксимации в качестве аппроксимирующей кривой чаще всего используются алгебраические кривые. Явная аппроксимация рассматривалась в алгоритме Lee, Haralick и Deguchi, в алгоритмах Tsai и Chen, Mokhtarian и Mackworth, Pei и Lin, Rattarangsi и Chin.

При неявной аппроксимации аппроксимирующая функция A ищется в виде $A = L_R^{-1} \circ L_Z$, где L_R (L_Z) – оператор, определенный на множестве всех гладких кривых $C^1(R^2)$ (оцифрованных кривых $C_d(Z^2)$), ставящий в соответствие кривой Γ некоторую (вообще говоря, векторную) характеристику $\mathbf{q}(\Gamma)$. Характеристика $\mathbf{q}$ должна быть определенной и для гладких и для цифровых кривых. Такая схема аппроксимации была применена в детекторе Харриса, где оценки кривизны вычислялись по изменению интенсивности функции изображения в четырех перпендикулярных направлениях в пределах некоторой окрестности (то есть в качестве характеристики $\mathbf{q}(\Gamma)$ рассматривался вектор изменения интенсивностей в разных направлениях полутонового изображения, содержащего кривую). Аналогичный подход используется в ряде алгоритмов по активным контурам.

В разделе 2.2 исследуются оценки кривизны, найденные методом явной локальной аппроксимации кривой. В этом подходе точечные значения $\{\mathbf{g}_s\}_{s=-m}^m$, $\mathbf{g}_s = (x_s, y_s)$, параметризованной кривой Γ с вектор-функцией $\mathbf{g}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, $-m \le t \le m$, аппроксимируются некоторой регулярной кривой с вектор-функцией вида $\mathbf{p}_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$, где

$$x_n(t) = x_n(t;\mathbf{c}^{(x)}) = \left(\mathbf{c}^{(x)}, \boldsymbol{\varphi}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(x)} \phi_k(t),\ y_n(t) = y_n(t;\mathbf{c}^{(y)}) = \left(\mathbf{c}^{(y)}, \boldsymbol{\varphi}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(y)} \phi_k(t),$$

$\{\phi_{k,2m}(t)\}_{k=0}^n$ – линейно независимая на $N_m = \{-m,...,m\}$ система дважды непрерывно-дифференцируемых на $(-m,m)$ базисных функций. В качестве критерия аппроксимации в этом разделе будем рассматривать среднеквадратичное отклонение $\sum_{s=-m}^m \left\| \mathbf{p}_n(s) - \mathbf{g}_s \right\|^2$. Тогда вектор-коэффициенты $\mathbf{c}^{(x)} = (c_0^{(x)},...,c_n^{(x)})^T$, $\mathbf{c}^{(y)} = (c_0^{(y)},...,c_n^{(y)})^T$ аппроксимирующей кривой можно найти методом наименьших квадратов. Производные $\mathbf{p}_n^{(i)}(0) = \left(\left(\mathbf{c}^{(x)}, \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(0)\right), \left(\mathbf{c}^{(y)}, \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(0)\right)\right)$, $i = 1,2$, аппроксимирующей вектор-функции будут оценками значений соответственно первой и второй производной оцифрованной вектор-функции $\{\mathbf{g}_s\}_{s=-m}^m$ в точке $\mathbf{g}_0$. Так как кривизна k регулярной параметризованной кривой $\mathbf{g}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ вычисляется по формуле $k = \left|\mathbf{g}' \times \mathbf{g}''\right| / \left|\mathbf{g}'\right|^3$, то величину $k_m^{(3)} = \left|\mathbf{p}_n'(0) \times \mathbf{p}_n''(0)\right| / \left|\mathbf{p}_n'(0)\right|^3$ можно считать m-оценкой кривизны в точке $\mathbf{g}_0$, полученной методом локальной аппроксимации кривой. Для простоты рассматривается задача вычисления кривизны и $m-$оценки кривизны в точке $x = 0$ кривой класса C^2, заданной в явной форме функцией $y(x)$ и удовлетворяющей условию $y'(0) = 0$ (т.е. касательная к кривой в точке $x = 0$ параллельна оси Ox). Тогда точное значений кривизны со знаком в начале координат будет равно $k = y''(0)$. Пусть $\{(s, y_s)\}_{s=-m}^m$ – точечные оцифрованные значения этой кривой. Для нахождения $m-$оценки кривизны $k_m^{(3)}$ в начале координат аппроксимируем эти значения функцией вида $y_n(t;\mathbf{c}) = \left(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}(t)\right) = \sum_{k=0}^n c_k \phi_k(t)$, где $\{\phi_{k,2m}(t)\}_{k=0}^n$ – линейно независимая на N_m система базисных функций. Теперь в качестве $m-$оценки $k_{m,n}^{(3)} = k_{m,n}^{(3)}(\mathbf{y})$

кривизны оцифрованной кривой $\{(s,y_s)\}_{s=-m}^{m}$ в точке $x=0$ можно взять величину $k_{m,n}^{(3)}=y_n''(0;\mathbf{c})=(\mathbf{c},\boldsymbol{\varphi}''(0))=\sum_{k=0}^{n}c_k\phi_k''(0)$. Вектор коэффициентов $\mathbf{c}$ найдем методом наименьших квадратов, минимизируя функцию среднеквадратичного отклонения. Тогда $\mathbf{c}$ будет решением матричного уравнения $A\mathbf{c}=\mathbf{b}$, где $A=(a_{ik})_{i,k=0}^{n}$, $a_{ik}=\sum_{s=-m}^{m}\phi_i(s)\phi_k(s)$, $b_i=\sum_{s=-m}^{m}\phi_i(s)y_s$. Если $\{\phi_{k,2m}(t)\}_{k=0}^{n}$ – система многочленов Чебышева, т.е. ортонормированная система евклидова пространства $P[-m,m]$ многочленов степени не больше $2m$ со скалярным произведением $(p,g)_0=\sum_{s=-m}^{m}p(s)g(s)$, то $\mathbf{c}=A^{-1}\mathbf{b}$ и $k_{m,n}^{(3)}=\left(A^{-1}\mathbf{b},\boldsymbol{\varphi}''(0)\right)$. Тогда $k_{m,n}^{(3)}=\sum_{s=-m}^{m}y_s\sum_{k=1}^{[n/2]}\phi_{2k,2m}(s)\phi_{2k,2m}''(0)$ – оценка кривизны.

Предложение 2.1. *Максимальное значение систематической ошибки вычисления m – оценки кривизны кривой, задаваемой многочленом степени l, $n<l\le 2m$, методом локальной аппроксимации с помощью ортонормированной системы многочленов $\{\phi_{k,2m}(t)\}_{k=0}^{n}$, равно* $\overline{s}_{m,n}=\|\mathbf{y}(m)\|\sqrt{\sum_{k=[n/2]+1}^{[l/2]}\left(\phi_{2k,2m}''(0)\right)^2}$.

Предположим, что точечные значения $\{(s,y_s)\}_{s=-m}^{m}$ кривой подвергнуты некоррелированному стационарному гауссовскому зашумлению $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$, т.е. имеется последовательность $\{(s,Y_s)\}_{s=-m}^{m}$, где $\mathbf{Y}=(Y_{-m},\dots,Y_m)$ – вектор нормально распределенных независимых случайных величин $Y_s=y_s+\xi_s$, $\xi_s\sim N(0,\sigma^2)$, $s=-m,\dots,m$. Тогда $K_{m,n}^{(3)}=\sum_{s=-m}^{m}Y_s\sum_{k=1}^{[n/2]}\phi_{2k,2m}(s)\phi_{2k,2m}''(0)$ – случайная оценка кривизны.

Теорема 2.1. *Случайная ошибка вычисления m – оценки кривизны $K_{m,n}^{(3)}$ точечной кривой на плоскости методом локальной аппроксимации с помощью ортонормированной системы многочленов $\{\phi_{k,2m}(t)\}_{k=0}^{n}$ при зашумлении $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ равна* $\boldsymbol{\sigma}^2[K_{m,n}^{(3)}]=\sigma^2\sum_{k=1}^{[n/2]}\left(\phi_{2k,2m}''(0)\right)^2$.

Следствие 2.1. *Наименьшая ненулевая случайная ошибка вычисления m – оценки кривизны точечной кривой на плоскости методом локальной аппроксимации многочленами степени не больше $2m$ при зашумлении $\mathcal{W}_{d,1}(\sigma)$ будет равна* $\boldsymbol{\sigma}^2[K_{m,2}^{(3)}]=\frac{180\sigma^2}{m(m+1)(2m+1)(4m^2+4m-3)}$.

В этом же разделе решается задача нахождения оптимальных значений параметров метода локальной аппроксимации. В целом относительно вычисления оценок кривизны методом явной локальной аппроксимации, можно сделать следующие выводы. При некоррелированном нормальном зашумлении оцифрованной кривой оценка кривизны $k_m^{(3)}(\mathbf{y})$ имеет: 1) систематическую ошибку, которая может быть уменьшена при уменьшении размера окна m; 2) случайную ошибку, которая может быть сколь угодно уменьшена при увеличении размера окна m. Порядок устойчивости оценки кривизны – 2.5.

В разделе 2.2 кривизна оценивается методом неявной локальной аппроксимации оцифрованной кривой. Ниже часто будем использовать понятие нормированной оценки кривизны. Пусть $k^\Gamma=k^\Gamma(\mathbf{g})$ – кривизна гладкой кривой Γ в точке $\mathbf{g}$.

Определение 2.1. *Функцию $v_\varepsilon(\mathbf{g})=v_\varepsilon^\Gamma(\mathbf{g})$, зависящую от параметра $\varepsilon>0$, будем называть нормированной ε – оценкой кривизны (ε – весом) кривой в точке $\mathbf{g}$, если она удов-*

летворяет условиям: 1) $0 \le v_\varepsilon \le 1$ *для любого* $\varepsilon > 0$*; 2)* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon^\Gamma(\mathbf{g})/\varepsilon = C\left|k^\Gamma(\mathbf{g})\right|$ *для гладкой кривой* Γ*, где* $C > 0$ *– некоторая константа, не зависящая от точки* $\mathbf{g}$.

Тогда ε–оценкой кривизны кривой в точке $\mathbf{g}$ будет функция $k_\varepsilon(\mathbf{g}) = C^{-1} v_\varepsilon(\mathbf{g})/\varepsilon$. Заметим, что иногда удобнее, чтобы вместо условий 1) и 2) вес удовлетворял условиям: $1'$) $-1 \le v_\varepsilon \le 1$ для любого $\varepsilon > 0$; $2'$) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} v_\varepsilon^\Gamma(\mathbf{g})/\varepsilon = Ck^\Gamma(\mathbf{g})$ для гладкой кривой Γ. Такое определение веса будет соответствовать вычислению оценки кривизны «со знаком».

Пусть ρ – некоторая метрика в $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем точку $\mathbf{g} \in \Gamma$ и рассмотрим ε-окрестность $U_\varepsilon(\mathbf{g}) = \{\mathbf{x} : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \le \varepsilon\}$, причем величина $\varepsilon > 0$ такая, что гладкая кривая Γ пересекает окружность $\partial U_\varepsilon(\mathbf{g})$ ровно в двух точках. Через $\mu_\varepsilon(\mathbf{g})$ и $\overline{\mu}_\varepsilon(\mathbf{g})$ обозначим площади областей, расположенных по разные стороны от кривой Γ в пределах окрестности $U_\varepsilon(\mathbf{g})$, а через $S_\varepsilon(\mathbf{g})$ площадь окрестности $U_\varepsilon(\mathbf{g})$. Рассмотрим две нормированные разности площадей $\mu_\varepsilon(\mathbf{g})$ и $\overline{\mu}_\varepsilon(\mathbf{g})$: а) $v_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{g}) = \left|\mu_\varepsilon(\mathbf{g}) - \overline{\mu}_\varepsilon(\mathbf{g})\right| / \max\{\mu_\varepsilon(\mathbf{g}), \overline{\mu}_\varepsilon(\mathbf{g})\}$; б) $v_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{g}) = \left|1 - 2\mu_\varepsilon(\mathbf{g})/S_\varepsilon(\mathbf{g})\right|$. Будем называть вес $v_\varepsilon^{(2)}$ и соответствующую оценку кривизны $k_\varepsilon^{(2)}$ линейными, а вес $v_\varepsilon^{(1)}$ и оценку $k_\varepsilon^{(1)}$ нелинейными. Показано, что выбор функций $v_\varepsilon^{(1)}$ и $v_\varepsilon^{(2)}$ не случаен, так как они обеспечивают минимум функционала дисперсии функции случайной величины $F(\varphi) = \boldsymbol{\sigma}^2\left[\varphi\left(\left|\frac{2\mathrm{M}_\varepsilon}{S_\varepsilon} - 1\right|\right)\right]$ для точек высокой и низкой кривизны соответственно и некоторого класса функций $\varphi(t)$, $0 \le t \le 1$, удовлетворяющих условиям: а) $0 \le \varphi(t) \le 1$; б) $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Здесь M_ε – случайная площадь, ограниченная зашумленной кривой.

Теорема 2.2. *В случае вычисления нормированной оценки кривизны в точке* $\mathbf{g} \in \Gamma \in C^3$ *в евклидовой метрике верно равенство* $v_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{g}) = \frac{4}{3\pi} k(\mathbf{g})\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, $k_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{g}) = \frac{3\pi}{4\varepsilon} v_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{g})$ – оценка кривизны.

Следствие 2.3. *Для систематической ошибки вычисления оценки кривизны* $k_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{g})$ *в точке* $\mathbf{g} \in \Gamma \in C^3$ *справедливо неравенство* $\left|k(\mathbf{g}) - k_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{g})\right| \le \frac{4+9q\pi}{6\pi} k^2(\mathbf{g})\varepsilon + o(\varepsilon)$, *где* $q = \frac{1}{6r}\max\left\{\left|s'''(\phi)\right| : |\phi| \le \arcsin(\varepsilon/r)\right\}$, $s(\phi)$ *– функция полярного уравнения кривой в окрестности точки* $\mathbf{g}$.

Аналогичные результаты получены для веса $v_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{g})$ и оценки $k_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{g})$, а также – в случае вычисления веса и оценки кривизны в равномерной метрике.

Предположим, что дискретная плоская кривая без самопересечений $\Gamma = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$, подвергнута вероятностному зашумлению $\mathcal{N}_{d,2}\left((\sigma_{x,t})_t, (\sigma_{y,r})_r\right)$. В результате получим случайную кривую $\tilde{\Gamma} = (\mathbf{G}_k)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{G}_k = X_k\mathbf{i} + Y_k\mathbf{j}$, где $X_k = x_k + \eta_k$, $Y_k = y_k + \xi_k$, η_k, ξ_k – случайные некоррелированные величины, причем $\mathbf{E}[\eta_k] = \mathbf{E}[\xi_k] = 0$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\eta_k] = \sigma_{x,k}^2$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\xi_k] = \sigma_{y,k}^2$.

Пусть $D(\Gamma)$ – область, ограниченная замкнутой ломаной без самопересечений с вершинами в точках $(\mathbf{g}_k)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_n$, дискретной кривой Γ, а $\mu(D(\Gamma))$ – площадь области $D(\Gamma)$. В работе оценена случайная ошибка линейного веса $V_\varepsilon^{(2)}$ и линейной оценки кривизны $K_\varepsilon^{(2)}$ в равномерной метрике. Пусть $\mu_\varepsilon(\mathbf{g}_s) = \mu(D(\Gamma) \cap U_\varepsilon(\mathbf{g}_s))$. Обозначим через

$\tau_{\varepsilon,s}(\Gamma)=\{k_1,...,k_s\}$ те индексы k, для которых $\mathbf{g}_k\in U_\varepsilon(\mathbf{g}_s)$. Относительно соотношений между величиной ε и значениями точечных дисперсий $\sigma^2_{x,k}$ и $\sigma^2_{y,k}$ предполагается выполнение условий: 1) $P\left\{\left|\tau_{\varepsilon,s}(\Gamma)\Delta\tau_{\varepsilon,s}(\tilde{\Gamma})\right|>0\right\}=0$ (Δ – симметрическая разность множеств); 2) почти наверное $\tilde{\Gamma}$ не имеет самопересечений.

Предложение 2.5. *Пусть плоская дискретная кривая* Γ *подвергнута зашумлению* $\mathcal{N}_{d,2}\left((\sigma_{x,t})_t,(\sigma_{y,r})_r\right)$, *причем параметры этого зашумления, точка* $\mathbf{g}_s$ *и* $\varepsilon>0$ *удовлетворяют условиям 1), 2). Тогда почти наверное выполняются равенства: 1)* $\mathbf{E}\left[\mu_\varepsilon(\mathbf{G}_s)\right]=\mu_\varepsilon(\mathbf{g}_s)$; *2)* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_\varepsilon(\mathbf{G}_s)\right]=\varepsilon^2(\sigma^2_{y,k_1}+\sigma^2_{y,k_s}+4\sigma^2_{y,s})+\frac{1}{4}\left\{\sum_{i=k_1}^{k_s}\sigma^2_{x,i}\sigma^2_{y,i+1}+\sigma^2_{x,i+1}\sigma^2_{y,i}+\right.$ $\left.\sigma^2_{x,i}\Delta y_i^2+\sigma^2_{y,i}\Delta x_i^2\right\}+\varepsilon\left((x_{k_s}-x_{k_1+1})\sigma^2_{y,k_1}+(x_{k_s-1}-x_{k_1})\sigma^2_{y,k_s}+2(x_{s+1}-x_{s-1})\sigma^2_{y,s}\right)$.

Следствие 2.8. *Если выполняются условия предложения, то для зашумления* $\mathcal{N}^{(0)}_{d,2}(\sigma)$ *такого, что* $3\le\left|\tau_{\varepsilon,s}(\Gamma)\right|\le 2\varepsilon/\sigma$, $\Delta^2_{x,\varepsilon,s}\le 4\varepsilon^2$, $\Delta^2_{y,\varepsilon,s}\le 4\varepsilon^2$, *почти наверное справедлива оценка* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\widehat{\mu}_\varepsilon(\mathbf{G}_s)\right]\le 18\varepsilon^2\sigma^2+\varepsilon\sigma^3$.

Следствие 2.10. *Если выполняются условия предложения, то для случайной ошибки вычисления оценки кривизны и зашумления* $\mathcal{N}^{(0)}_{d,2}(\sigma)$ *почти наверное справедлива оценка* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\widehat{K}^{(2)}_\varepsilon\right]\le\frac{108\sigma^2}{\varepsilon^4}+\frac{9\sigma^3}{\varepsilon^5}$.

В разделе 2.3 рассматривается также класс $C_{c,z}(\tau)$ непрерывных параметризованных плоских оцифрованных кривых Γ без самопересечений, заданных функциями $\mathbf{g}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}$, $a\le t\le b$, и удовлетворяющих для фиксированного конечного разбиения $\tau=\{t_k\}_{k=0}^n$ отрезка $[a,b]$ условиям: 1) либо $x(t)=\mathrm{const}$, либо $y(t)=\mathrm{const}$ на $[t_k,t_{k+1})$ для всех k; 2) $x(t_k)\in Z$ для всех k; 3) $x(t_{k+1})\ge x(t_k)$, $x(t_{k-1})\ne x(t_{k+1})$ для всех k; 4) для любого $j\in[x(a),x(b)]$ найдется такое k, что $x(t_k)=j$.

Пусть $\mathcal{N}_{z,1}\left(\tau,(\sigma_k)_k\right)$ ($\mathcal{N}^{(0)}_{z,1}\left(\tau,\sigma\right)$) – класс целочисленных одномерных аддитивных некоррелированных (стационарных в широком смысле) зашумлений вида $\mathbf{n}(t)=\xi(t)\mathbf{j}$, определенных на кривых класса $C_{c,z}(\tau)$, такой, что если кривая $\Gamma\in C_{c,z}(\tau)$ задана функцией $\mathbf{g}(t)$, $t\in[a,b]$ ($\tau=\{t_k\}_{k=0}^n$ – разбиение отрезка $[a,b]$), то: а) $\mathbf{g}(t)+\overline{\xi}(t)\mathbf{j}\in C_{c,z}(\tau)$ для любой реализации $\overline{\xi}(t)$ случайной функции $\xi(t)$; б) $\xi(t_k)$, $t_k\in\tau$ - некоррелированные случайные величины; в) $\sigma^2[\xi(t_k)]=\sigma_k^2$ ($\sigma^2[\xi(t_k)]=\sigma^2$) для всех $t_k\in\tau$.

В разделе 2.3 рассматривается вычисление веса и кривизны в равномерной метрике. Без ограничения общности можно предположить, что кривая Γ проходит через начало координат, а вес и кривизна рассматриваются в точке $\mathbf{o}$ – начале координат. Тогда можно считать, что существует $t_k\in\tau$: $x(t_k)=0$, $y(t_k)=0$ и $\overline{y}(t_k)=0$ для любой реализации (т.е. все реализации случайной кривой проходят через начало координат). Рассмотрим $m-$окрестность начала координат ($m\in Z$) в равномерной метрике – квадрат $U_m=U_m(\mathbf{o})=[-m,m]^2$. Будем считать, что $\{x(t):a\le t\le b\}=[-m,m]$. Пусть $g_k=y(\min(x^{-1}(k)))$, $G_k=Y(\min(x^{-1}(k)))$, $\sigma_k^2=\boldsymbol{\sigma}^2\left[G_k\right]$. Тогда G_k – независимые случайные величины. В силу условия а) для зашумления $\mathcal{N}_{z,1}\left(\tau,(\sigma_k)_k\right)$ следует, что случайные величины G_k могут принимать только целочисленные значения g_k, $g_k\pm1$,..., $g_k\pm l$ с вероятностями $p_0^{(k)}$, $p_{\pm1}^{(k)}$,..., $p_{\pm l}^{(k)}$ соответственно ($\sum_{s=-l}^{l}p_s^{(k)}=1$, $p_s^{(k)}=p_{-s}^{(k)}$, $s=1,2,...,l$,

$k=-m,...,m$, где l – размах зашумления). Тогда $\mathbf{E}\left[G_k\right]=g_k$ и $\sigma_k^2=\boldsymbol{\sigma}^2\left[G_k\right]=2\sum_{s=1}^{l}s^2p_s^{(k)}$, $k=-m,...,m$. Если вероятностные распределения зашумлений во всех пикселях одинаковы, т.е. $p_s^{(k)}=p_s$, $s=1,2,...,l$ для всех $k=-m,...,m$ (такое целочисленное одномерное зашумление назовем однородным), то $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mathbf{G}\right]=2\sum_{s=1}^{l}s^2p_s$. Через $D_y^m=\{(x,y):x=x(t),$ $y\le y(t),a\le t\le b\}\cap U_m$ обозначим область, расположенную с одной стороны от кривой в пределах окрестности U_m. Пусть $\mu_m(y)$ - площадь области D_y^m, а размер m "окна" U_m удовлетворяет условию $\max\limits_{-m\le k\le m}\left|g_k\right|\le m-l$, $m>l$. Такое "окно" будем называть "большим". Тогда случайная величина $\mu_m(Y)$ может принимать целые значения $\mu_m(y)\pm r$, $r=0,...,l(2m-1)$, с вероятностями $P(\mu_m(y)\pm r)=\sum_{\substack{(i_{-m}+...+i_m)^{(0)}=\pm r,\\ i_k\in\{-l,...,l\}}}\prod_{k=-m}^{m}{}^{(0)}p_{i_k}^{(k)}$.

Предложение 2.7. *Случайная ошибка вычисления веса* $V_m^{(2)}$ *в случае зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}\left(\tau,(\sigma_k)_k\right)$ *будет равна* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[V_m^{(2)}\right]=\frac{1}{4m^4}{\sum}'^{m}_{k=-m}\sigma_k^2$. *В частности, для стационарного зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$ *имеем* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[V_m^{(2)}\right]=\frac{\sigma^2}{2m^3}$.

Следствие 2.11. *При тех же предположениях* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[K_m^{(2)}\right]=\frac{9}{m^6}{\sum}'^{m}_{k=-m}\sigma_k^2$. *В частности, для стационарного зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$: $\boldsymbol{\sigma}^2\left[K_m^{(2)}\right]=\frac{18\sigma^2}{m^5}$.

Теорема 2.4. *Пусть кривая* $\Gamma\in C_{c,z}(\tau)$ *подвергнута зашумлению* $\mathcal{N}_{z,1}\left(\tau,(\sigma_k)_k\right)$ *и* $v_m^{(1)}\ge h$. *Тогда* $\left|v_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[V_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{1}{m^2}C_1(h)\boldsymbol{\sigma}\left[\mu_m(Y)\right]$, *где* $C_1(h)=\frac{(2-h)^2}{2h}$. *В случае стационарного зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$ *имеем* $\left|v_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[V_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{\sqrt{2}}{m^{3/2}}C_1(h)\sigma$, *где* $\sigma^2=2\sum_{k=1}^{l}k^2p_k$.

Следствие 2.12. *При тех же предположениях для смещения вычисления оценки случайной кривизны* $K_m^{(1)}$ *справедливо неравенство* $\left|k_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[K_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{3}{m^3}C_1(h)\boldsymbol{\sigma}\left[\mu_m(Y)\right]$. *В случае зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$ *имеем* $\left|k_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[K_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{3\sqrt{2}}{m^{5/2}}C_1(h)\sigma$.

Если оцениваемая кривизна является достаточно большой, то справедливы более сильные оценки. Пусть $h_0=\frac{9-\sqrt{17}}{8}$.

Теорема 2.5. *Если кривая* $\Gamma\in C_{c,z}(\tau)$ *подвергнута зашумлению* $\mathcal{N}_{z,1}\left(\tau,(\sigma_k)_k\right)$ *и* $v_m^{(1)}\ge h\ge h_0$, *то* $\left|v_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[V_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{1}{m^4}C_2(h)\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]$, *где* $C_2(h)=\frac{(2-h)^2}{16h}$. *В случае зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$ *имеем* $\left|v_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[V_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{2}{m^3}C_2(h)\sigma^2$.

Следствие 2.13. *При тех же предположениях для смещения вычисления оценки случайной кривизны* $K_m^{(1)}$ *справедливо неравенство* $\left|k_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[K_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{3}{m^5}C_2(h)\sigma^2\left[\mu_m(Y)\right]$. *В случае зашумления* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$ *имеем* $\left|k_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[K_m^{(1)}\right]\right|\le\left|k_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[K_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{6}{m^4}C_2(h)\sigma^2$.

Следствие 2.15. *Если* $v_m^{(1)}\ge h>\max\{h(l,m),h_0\}$, *то справедлива оценка* $\frac{3}{16m^5}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\le\left|k_m^{(1)}-\mathbf{E}\left[K_m^{(1)}\right]\right|\le\frac{3(2-h)^2}{16m^5h}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]$.

Теорема 2.6. *Пусть кривая* $\Gamma\in C_{c,z}(\tau)$ *подвергнута зашумлению* $\mathcal{N}_{z,1}\left(\tau,(\sigma_k)_k\right)$ *и* $v_m^{(1)}\ge h>h(l,m)$. *Тогда* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[V_m^{(1)}\right]\le\frac{1}{m^4}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\left(C_3(h)-\frac{1}{256m^4}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\right)$, $C_3(h)=\frac{(2-h)^2(22-7h)}{36(2+h)}$.

Следствие 2.16. *При тех же предположениях и* $\nu_m^{(1)} \geq h > h(l,m)$ *верно неравенство* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[K_m^{(1)}\right] \leq \frac{9}{m^6}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\left(C_3(h) - \frac{1}{256m^4}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\right)$.

Следствие 2.17. *При тех же предположениях и* $h > h_0$ *верна оценка* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[K_m^{(1)}\right] \geq \frac{9}{16m^6}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\left(1 - \frac{(2-h)^4}{16h^2m^4}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mu_m(Y)\right]\right)$.

Решается также задача нахождения оптимальных значений параметров метода.

В третьей главе исследуется робастность (устойчивость) векторных представлений при изменении информативности низкоуровневых особенностей. Под *векторным представлением кривой* в этой главе будем понимать множество векторов $\Lambda = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_s\}$, каждый вектор которого это – упорядоченное множество значений некоторых функций от контрольных точек кривой (точек с большим значением информативного признака, например, оценки кривизны), обладающие свойствами:

1) все векторы множества Λ инвариантны относительно сдвига, поворота и масштабирования контура;

2) по векторам $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, ..., \mathbf{B}_s$ может быть однозначно построена ломаная, подобная ломаной с вершинами в контрольных точках.

Кроме векторных представлений рассматриваются также описания кривых, не удовлетворяющие свойству 2.

Другая задача, решаемая в этой главе – получение минимальных устойчивых к зашумлению полигональных представлений кривых. Эта задача относится к задачам нахождения аппроксимирующей ломаной, удовлетворяющей определенному условию оптимальности. Такая задача для разных критериев оптимальности рассматриалась в работах C.M. Williams, U. Ramer, J. Sklansky, V. Gonzalez, T. Pavlidis, А. Колесникова и др.

В разделе 3.2 для описания векторных представлений дискретных кривых рассматривается понятие меры информативности. Пусть $\Gamma = \left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$, – плоская дискретная кривая и Ψ – некоторый класс плоских спрямляемых кривых без самопересечений. Ψ-представлением плоской кривой $\Gamma = \left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{p-1}$ будем называть пару $(B, \Lambda(B,\Psi))$ упорядоченного множества точек кривой $B = \left\{\mathbf{g}_{i_1}, ..., \mathbf{g}_{i_l}\right\}$, $\mathbf{g}_{i_s} \in \Gamma$, $s = 1,...,l$, и множества кривых $\Lambda(B,\Psi) = \left\{\Lambda_{i_1}, ..., \Lambda_{i_{l-1}}\right\}$, $\Lambda_{i_s} \in \Psi$, $s = 1,...,l-1$, таких, что: 1) $\mathbf{g}_{i_s}$ - начало, а $\mathbf{g}_{i_{s+1}}$ – конец кривой Λ_{i_s}, $s = 1,...,l-1$; 2) $d(\Lambda_{i_s}, \Gamma_{i_s}) = \inf\limits_{\Lambda\in\Psi} d(\Lambda, \Gamma_{i_s})$, где Γ_{i_s} – часть кривой Γ, заключенная между точками $\mathbf{g}_{i_s}$ и $\mathbf{g}_{i_{s+1}}$. Если два Ψ-представления (B', Λ') и (B'', Λ'') определяют одну кривую, то будем писать ($(B', \Lambda') \sim (B'', \Lambda'')$).

Определение 3.2. Ψ*-мерой информативности на* 2^Γ *назовем функцию множеств* μ, *удовлетворяющую условиям: 1)* $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\Gamma) = 1$ *(нормированность); 2) если* $A \subseteq B$, *то* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *(монотонность); 3) если* $(A, \Lambda(A,\Psi)) \sim (B, \Lambda(B,\Psi))$, *то* $\mu(A) = \mu(B)$.

Примерами мер информативности является нормированная длина ломаной с вершинами в точках представления A или нормированная площадь многоугольника с вершинами в точках представления A, если множество Γ определяет выпуклый многоугольник. В разделе 3.2 рассматриваются меры информативности по кривизне. Введем два отображения K_ε^l и K_ε^g из 2^Γ в l_q^n ($n \leq N$, $0 < q \leq \infty$), действующие по правилам: K_ε^l: $A = \left\{\mathbf{g}_{i_s}\right\}_{s=1}^{l} \mapsto \left(k_\varepsilon\left[A\right](\mathbf{g}_{i_s})\right)_{s=1}^{l}$, K_ε^g: $A = \left\{\mathbf{g}_{i_s}\right\}_{s=1}^{l} \mapsto \left(k_\varepsilon\left[\Gamma\right](\mathbf{g}_{i_s})\right)_{s=1}^{l}$, $A \in 2^\Gamma$, где k_ε – некоторая ε-оценка кривизны. Первое отображение ставит в соответствие полигональному представлению A упорядоченное множество оценок кривизны дискретной кривой A. Второе отображение ставит в соответствие полигональному представлению A упорядоченное множество оценок кривизны дискретной кривой Γ в точках представления A. Очевидно, что $K_\varepsilon^l(\Gamma)=K_\varepsilon^g(\Gamma)$. Определим на 2^Γ функции информативности по кривизне

$$\mu_{q,\varepsilon}^l(A)=\left\|K_\varepsilon^l(A)\right\|_q \Big/ \left\|K_\varepsilon^l(\Gamma)\right\|_q, \qquad \mu_{q,\varepsilon}^g(A)=\left\|K_\varepsilon^g(A)\right\|_q \Big/ \left\|K_\varepsilon^g(\Gamma)\right\|_q, \qquad (2)$$

причем будем считать, что $\mu_{q,\varepsilon}^l(A)=\varnothing$, если множество A имеет мощность не больше двух, а $\mu_{q,\varepsilon}^g(A)=\varnothing$ для $A=\varnothing$. Нетрудно видеть, что $\mu_{q,\varepsilon}^l(\Gamma)=\mu_{q,\varepsilon}^g(\Gamma)=1$ и функция множеств $\mu_{1,\varepsilon}^g$ является аддитивной мерой. Назовем $\mu_{q,\varepsilon}^l$ ($\mu_{q,\varepsilon}^g$) *функцией информативности по локальной (глобальной) кривизне*. При $q=1$ получим так называемые *усредненные функции информативности.* Усредненную функцию информативности μ дискретной кривой Γ можно представить в виде

$$\mu(A)=\sum\nolimits_{\mathbf{g}\in A}\omega(\mathbf{g},A)\Big/\sum\nolimits_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega(\mathbf{g},\Gamma),\ A\in 2^\Gamma, \qquad (3)$$

где $\omega(\mathbf{g},A)$ – неотрицательное значение признака представления A кривой Γ в $\mathbf{g}\in A$.

Рассмотрим функцию информативности по локальной кривизне, определенную на 2^Γ, где $\Gamma=\left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$ – замкнутая дискретная плоская кривая, $\mathbf{g}_n=\mathbf{g}_0$. Через $\mu_{q,\varepsilon}^{(i)}$, $i=1,2$, обозначим функцию множеств вида (2), в которой оценка кривизны $k_\varepsilon^{(i)}\left[A\right](\mathbf{g})$, $\mathbf{g}\in A$, $i=1,2$, вычисляется методом геометрического сглаживания (глава 2), т.е. а) $k_\varepsilon^{(1)}\left[A\right](\mathbf{g})= C_\varepsilon^{(1)}\left|\mu_\varepsilon(\mathbf{g})-\bar\mu_\varepsilon(\mathbf{g})\right|\big/\max\left\{\mu_\varepsilon(\mathbf{g}),S_\varepsilon(\mathbf{g})-\mu_\varepsilon(\mathbf{g})\right\}$; б) $k_\varepsilon^{(2)}\left[A\right](\mathbf{g})=C_\varepsilon^{(2)}\left|1-2\mu_\varepsilon(\mathbf{g})/S_\varepsilon(\mathbf{g})\right|$, где $S_\varepsilon(\mathbf{g})$ – площадь ε-окрестности $U_\varepsilon(\mathbf{g})$ с центром в точке $\mathbf{g}$, $\mu_\varepsilon(\mathbf{g})$ - площадь области $U_\varepsilon(\mathbf{g})\cap\bar{A}$, $C_\varepsilon^{(i)}$ – константы, зависящие от выбранной метрики (см. главу 2).

Пусть $A=\left\{\mathbf{g}_{i_1},...,\mathbf{g}_{i_l}\right\}\subseteq\Gamma$ – некоторое полигональное представление замкнутой кривой $\Gamma=\left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_n=\mathbf{g}_0$, $\beta_i(A)$ – внутренний угол многоугольника представления A в вершине $\mathbf{g}_i$, $\mathrm{B}(A)$ – множество всех внутренних углов представления A. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 3.3. *Пусть* $\varepsilon\le 0.5\min\limits_{0\le i\le n-1}\left|\mathbf{g}_i-\mathbf{g}_{i+1}\right|$ *и кривизна оценивается в евклидовой метрике. Тогда справедливы следующие свойства функций множеств* $\mu_{q,\varepsilon}^{(1)}$ *и* $\mu_{q,\varepsilon}^{(2)}$*: 1)* $\mu_{q,\varepsilon}^{(1)}(A)=\left(\psi_q(A)/\psi_q(\Gamma)\right)^{1/q}$, $\mu_{q,\varepsilon}^{(2)}(A)=\left(\varphi_q(A)/\varphi_q(\Gamma)\right)^{1/q}$, *где* $\psi_q(A)=\sum\nolimits_{\beta\in\mathrm{B}(A)}\left|1-\frac{\pi}{\max\{\beta,2\pi-\beta\}}\right|^q$, $\varphi_q(A)=\sum\nolimits_{\beta\in\mathrm{B}(A)}\left|\pi-\beta\right|^q$*; 2)* $\mu_{1,\varepsilon}^{(2)}$ *– монотонная мера на* 2^Γ*; 3) если* $\bar\Gamma$ *– выпуклое множество, то мера* $\mu_{1,\varepsilon}^{(2)}$ *будет примитивной, то есть* $\mu_{1,\varepsilon}^{(2)}(A)\equiv 1$ *для любого множества* $A\in 2^\Gamma$, $\left|A\right|\ge 3$*; 4) если замкнутая область* $\bar\Gamma$*, ограниченная многоугольником* Γ*, является выпуклой, то* $\mu_{1,\varepsilon}^{(1)}(A)=\psi_1(A)/\psi_1(\Gamma)$ *– монотонная мера на* 2^Γ *и* $\psi_1(A)=\left|A\right|-\pi\sum\nolimits_{\beta\in\mathrm{B}(A)}(2\pi-\beta)^{-1}$.

Предложение 3.4. *Пусть* $0<q<1$ *и* $\bar\Gamma$ *– такой выпуклый многоугольник, что все его внутренние углы не превосходят величины* $\pi(1-t_0)$*, где* t_0 *– корень уравнения* $t^q+2^{q-1}(1-t)^q=1$, $0<t<1$*. Тогда* $\mu_{q,\varepsilon}^{(2)}$ *будет монотонной мерой на* 2^Γ*, если* $\varepsilon\le 0.5\min\limits_{0\le i\le n-1}\left|\mathbf{g}_i-\mathbf{g}_{i+1}\right|$.

В пункте 3.2.3 рассматривается обобщение усредненной меры информативности. Пусть Γ – плоская дискретная кривая, μ – усредненная мера информативности на 2^Γ вида (3) и $\omega(\mathbf{g},A)=\omega(\mathbf{g},\Gamma)=\omega(\mathbf{g})$ для всех $\mathbf{g}\in A$ и $A\in 2^\Gamma$. Тогда мера μ равна $\mu(A)=\sum_{\mathbf{g}\in A}\omega(\mathbf{g})\big/\sum_{\mathbf{g}\in\Gamma}\omega(\mathbf{g})$, $A\in 2^\Gamma$, и является аддитивной. Предположим, что дискретная плоская кривая $\Gamma=\left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k=x_k\mathbf{i}+y_k\mathbf{j}$, подвергнута вероятностному зашумлению $\mathcal{N}_{d,2}\left((\sigma_{x,t})_t,(\sigma_{y,r})_r\right)$. В результате получим случайную кривую $\tilde{\Gamma}=\left(\mathbf{G}_k\right)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{G}_k=X_k\mathbf{i}+Y_k\mathbf{j}$, где $X_k=x_k+\eta_k$, $Y_k=y_k+\xi_k$, η_k,ξ_k – случайные некоррелированные величины, причем $\mathbf{E}[\eta_k]=\mathbf{E}[\xi_k]=0$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\eta_k]=\sigma_{x,k}^2$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\xi_k]=\sigma_{y,k}^2$. В этом случае признаковые характеристики $\omega(\mathbf{G})=\Omega(\mathbf{g})$ будут случайными величинами, также как и значение меры $\mathrm{M}(A)=\sum_{\mathbf{g}\in A}\Omega(\mathbf{g})\big/\sum_{\mathbf{g}\in\Gamma}\Omega(\mathbf{g})$ для фиксированного $A\in 2^\Gamma$. Для каждого случайного исхода функция множеств $\mathrm{M}(A)$ будет аддитивной мерой. Семейство случайных величин $\left\{\mathrm{M}(A):A\in 2^{\mathrm{B}}\right\}$ удовлетворяет всем условиям определения элементарной ортогональной стохастической меры. Предположим, что существует такое базовое множество $\mathrm{B}\subseteq\Gamma$, что случайные величины $\Omega(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}\in\mathrm{B}$, независимы. Пусть $\mu(A)=\sum_{\mathbf{g}\in A}\omega(\mathbf{g})\big/\sum_{\mathbf{g}\in\mathrm{B}}\omega(\mathbf{g})$, $A\in 2^{\mathrm{B}}$, где по-прежнему $\omega(\mathbf{g})=\omega(\mathbf{g},\Gamma)$, $\mathbf{E}\left[\Omega(\mathbf{g})\right]=m_{\mathbf{g}}$, $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\Omega(\mathbf{g})\right]=\sigma_{\mathbf{g}}^2$.

В разделе 3.3. поставлена задача о нахождении такого полигонального представления контура Γ – базового множества B, мощности не больше заданного числа k, для которого суммарная дисперсия $\sum_{A\subseteq\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mathrm{M}(A)\right]$ по всем подмножествам полигонального представления была бы минимальной, а сумма квадратов математических ожиданий всех представлений $\sum_{A\subseteq\mathrm{B}}\mathbf{E}^2\left[\mathrm{M}(A)\right]$ была бы максимальной. Для упрощения выкладок вместо математических ожиданий нормированных мер информативности $\mathbf{E}\left[\mathrm{M}(A)\right]$, $A\subseteq\mathrm{B}$, будем использовать математические ожидания ненормированных мер $S(A)$, $A\subseteq\mathrm{B}$. Введем следующий критерий: $f(\mathrm{B})=\sum_{A\subseteq\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mathrm{M}(A)\right]\big/\sum_{A\subseteq\mathrm{B}}S^2(A)$, $\left|\mathrm{B}\right|\le k$. Тогда требуется найти такое множество B, $\left|\mathrm{B}\right|\le k$, для которого $f(\mathrm{B})\to\min$. Кроме того, выбор множества B должен быть таким, чтобы случайные признаки $\Omega(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}\in\mathrm{B}$, были независимыми. Пусть $S(A)=\sum_{\mathbf{g}\in A}m_{\mathbf{g}}$, $D(A)=\sum_{\mathbf{g}\in A}\sigma_{\mathbf{g}}^2$, $S_2(\mathrm{B})=\sum_{\mathbf{g}\in\mathrm{B}}m_{\mathbf{g}}^2$, $SD(\mathrm{B})=\sum_{\mathbf{g}\in\mathrm{B}}\sigma_{\mathbf{g}}^2m_{\mathbf{g}}$.

Предложение 3.5. *Если кривая* Γ *подвергнута зашумлению* $\mathcal{N}_{d,2}\left((\sigma_{x,t})_t,(\sigma_{y,r})_r\right)$, *то для любого* $\mathrm{B}\in 2^\Gamma$ *справедливо равенство* $f(B)=\frac{1}{S^3(\mathrm{B})}\left\{\frac{1}{S(\mathrm{B})}D(\mathrm{B})-\frac{2}{S_2(\mathrm{B})+S^2(\mathrm{B})}SD(\mathrm{B})\right\}$.

Теорема 3.1. *Если кривая* Γ *подвергнута зашумлению* $\mathcal{N}_{d,2}\left((\sigma_{x,t})_t,(\sigma_{y,r})_r\right)$, *то для любого* $\mathbf{g}\in\mathrm{B}$ *и* $\mathbf{h}\in\Gamma\setminus\mathrm{B}$ *имеет место следующее равенство*

$$f\left((\mathrm{B}\setminus\mathbf{g})\cup\mathbf{h}\right)-f(\mathrm{B})=\tfrac{1}{S^4(\mathrm{B})}\left(Q_1(\mathrm{B})(m_{\mathbf{h}}-m_{\mathbf{g}})+\sigma_{\mathbf{h}}^2-\sigma_{\mathbf{g}}^2\right)+o(\tau),$$

где $Q_1(\mathrm{B})=\frac{2}{\left(S_2(\mathrm{B})+S^2(\mathrm{B})\right)^2}SD(\mathrm{B})\left(3S_2(\mathrm{B})+5S^2(\mathrm{B})\right)-\frac{4}{S(\mathrm{B})}D(\mathrm{B})$, $\tau=\sqrt{\frac{1}{S^2(\mathrm{B})}\left(m_{\mathbf{g}}^2+m_{\mathbf{h}}^2\right)+\frac{1}{D^2(\mathrm{B})}\left(\sigma_{\mathbf{g}}^4+\sigma_{\mathbf{h}}^4\right)}$.

Формула из теоремы 3.1 используется для построения алгоритмической процедуры нахождения полигонального представления, минимизирующего функцию критерия f.

В пункте 3.2.4 рассматривается усредненная мера информативности, когда значение признака $\omega(\mathbf{g},A)$ в точке $\mathbf{g}$ представления A зависит как от координат самой точки $\mathbf{g}$, так и некоторых соседних с ней точек. Рассмотрен случай, когда $\omega(\mathbf{g},A)=\omega(\mathbf{g},\mathbf{g}_+(A))$ для всех $\mathbf{g}\in A$ и $A\in 2^{\Gamma}$, $|A|>2$, где $\mathbf{g}_+(A)$ – точка, следующая за точкой $\mathbf{g}$ в упорядоченном представлении A. В этом случае мера информативности μ может быть как монотонной, так и немонотонной.

Предположим, что дискретная плоская замкнутая кривая $\Gamma=\left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k=x_k\mathbf{i}+y_k\mathbf{j}$, подвергнута вероятностному зашумлению $\mathcal{N}_{d,2}\left((\sigma_{x,t})_t,(\sigma_{y,r})_r\right)$. В результате получим случайную кривую $\tilde{\Gamma}=\left(\mathbf{G}_k\right)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{G}_k=X_k\mathbf{i}+Y_k\mathbf{j}$, где $X_k=x_k+\eta_k$, $Y_k=y_k+\xi_k$, η_k,ξ_k – случайные некоррелированные величины, причем $\mathbf{E}[\eta_k]=\mathbf{E}[\xi_k]=0$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\eta_k]=\sigma_{x,k}^2$, $\boldsymbol{\sigma}^2[\xi_k]=\sigma_{y,k}^2$. В этом случае признаковые характеристики $\omega(\mathbf{G},A)=\Omega(\mathbf{g},\mathbf{g}_+(A))$ будут случайными величинами, также как и значение меры $\mathrm{M}(A)=\sum_{\mathbf{g}\in A}\Omega(\mathbf{g},\mathbf{g}_+(A))\Big/\sum_{\mathbf{g}\in\Gamma}\Omega(\mathbf{g},\mathbf{g}_+(\Gamma))$. Пусть $\Omega\left(\mathbf{g}_{j_k},\left(\mathbf{g}_{j_k}\right)_+(A)\right)=\Omega_{k,k+1}(A)$, если $A=\{\mathbf{g}_{j_0},...,\mathbf{g}_{j_{m-1}}\}$, $\mathbf{E}\left[\Omega_{k,k+1}(A)\right]=m_k(A)$, $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\Omega_{k,k+1}(A)\right]=\sigma_k^2(A)$, $\mathbf{K}\left[\Omega_{j-1,j}(\mathrm{B}),\Omega_{j,j+1}(\mathrm{B})\right]=k_j(\mathrm{B})$, $S(A)=\sum_i m_i(A)$, $k_i^{\mathrm{B}}(A)=\mathbf{K}\left[\Omega_{i,i+1}(A),\Omega_{\pi_A(i)-1,\pi_A(i)}(\mathrm{B})\right]+\sigma_i^2(A)+\mathbf{K}\left[\Omega_{i,i+1}(A),\Omega_{\pi_A(i+1),\pi_A(i+1)+1}(\mathrm{B})\right]$, $K(A,\mathrm{B})=\sum_i k_i^{\mathrm{B}}(A)$.

Предложение 3.6. *Мера* $\mathrm{E}\left[\mathrm{M}(\cdot)\right]$ *является монотонной мерой на* 2^{B} *тогда и только тогда, когда для любого* $A\in 2^{\mathrm{B}}$ *и любого* $\mathbf{h}\in\mathrm{B}\setminus A$ *верно неравенство* $\Delta m(A;\{\mathbf{h}\})\left(S^2(\mathrm{B})+K(\mathrm{B},\mathrm{B})\right)\geq\Delta k^{\mathrm{B}}(A;\{\mathbf{h}\})S(\mathrm{B})$, *где* $\Delta m(A;\{\mathbf{h}\})=m_i(A\cup\{\mathbf{h}\})+m_{i+1}(A\cup\{\mathbf{h}\})-m_i(A)$, $\Delta k^{\mathrm{B}}(A;\{\mathbf{h}\})=k_i^{\mathrm{B}}(A\cup\{\mathbf{h}\})+k_{i+1}^{\mathrm{B}}(A\cup\{\mathbf{h}\})-k_i^{\mathrm{B}}(A)$.

В пункте 3.2.5 рассматривается стохастическая мера информативности по длине: в качестве признакового значения $\omega(\mathbf{g},A)=\omega(\mathbf{g},\mathbf{g}_+(A))$ полигонального представления A в точке $\mathbf{g}$ используется длина звена ломаной $\omega(\mathbf{g},A)=\|\Delta\mathbf{g}(A)\|$, где $\Delta\mathbf{g}(A)=\mathbf{g}-\mathbf{g}_+(A)$. Предположим, что дискретная плоская замкнутая кривая $\Gamma=\left(\mathbf{g}_k\right)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k=x_k\mathbf{i}+y_k\mathbf{j}$, подвергнута зашумлению $\mathcal{W}_{d,2}(\sigma)$ (зашумление типа «дискретный белый гауссовский шум»), в результате получим случайную кривую $\tilde{\Gamma}=\left(\mathbf{G}_k\right)_{k=0}^{p-1}$, $\mathbf{G}_k=\mathbf{g}_k+\mathbf{n}_k$, где $\mathbf{n}_k=\eta_k\mathbf{i}+\xi_k\mathbf{j}$, $\eta_k,\xi_k\sim N(0,\sigma^2)$. В этом случае признаковые характеристики $\omega(\mathbf{G},A)=\Omega(\mathbf{g},A)=\|\mathbf{G}-\mathbf{G}_+(A)\|=\|\Delta\mathbf{G}(A)\|$ будут случайными величинами. Пусть $\alpha(\mathbf{g})$ ($\beta(\mathbf{g})$) – внутренний угол многоугольника A (многоугольника B) в вершине $\mathbf{g}$, $\gamma(\mathbf{g})$ – угол между векторами $\mathbf{g}_+(A)-\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}_+(\mathrm{B})-\mathbf{g}$, $L(A)$ – длина ломаной с вершинами в точках множества A.

Теорема 3.2. *Для математического ожидания стохастической меры информативности по длине* $\mathbf{E}\left[\mathrm{M}(\cdot)\right]$ *на* 2^{B} *при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,2}(\sigma)$ *справедливо равенство* $\mathbf{E}\left[\mathrm{M}(A)\right]=\frac{L(A)}{L(\mathrm{B})}+\frac{\sigma^2}{L^2(\mathrm{B})}C_1(A,\mathrm{B})+o\left(\sigma^2/\underline{\Delta}^2(A,\mathrm{B})\right)$, $A\in 2^{\mathrm{B}}$, *где* $C_1(A,\mathrm{B})=-L(A)\sum_{\mathbf{g}\in\mathrm{B}}\|\Delta\mathbf{g}\|^{-1}+L(\mathrm{B})\sum_{\mathbf{g}\in A}\|\Delta\mathbf{g}\|^{-1}+\frac{4L(A)}{L(\mathrm{B})}\sum_{\mathbf{g}\in\mathrm{B}}\cos^2\frac{\beta(\mathbf{g})}{2}-4\sum_{\mathbf{g}\in A}\cos\frac{\alpha(\mathbf{g})}{2}\cos\frac{\beta(\mathbf{g})}{2}\cos\left(\gamma(\mathbf{g})+\frac{\alpha(\mathbf{g})-\beta(\mathbf{g})}{2}\right)$.

Теорема 3.3. *Для дисперсии стохастической меры информативности по длине* $\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mathrm{M}(\cdot)\right]$ *на* 2^{B} *при зашумлении* $\mathcal{W}_{d,2}(\sigma)$ *справедливо асимптотическое равенство*

$\boldsymbol{\sigma}^2\left[\mathrm{M}(A)\right]=\frac{4\sigma^2}{L^2(\mathrm{B})}C_2(A,\mathrm{B})+o\left(\sigma^2/\underline{\Delta}^2(A,\mathrm{B})\right)$, $A\in 2^{\mathrm{B}}$, *где* $C_2(A,\mathrm{B})=\frac{1}{L^2(\mathrm{B})}\Big(L^2(\mathrm{B})\sum_{\mathbf{g}\in A}\cos^2\frac{\alpha(\mathbf{g})}{2}+$ $L^2(A)\sum_{\mathbf{g}\in \mathrm{B}}\cos^2\frac{\beta(\mathbf{g})}{2}-2L(A)L(\mathrm{B})\sum_{\mathbf{g}\in A}\cos\frac{\alpha(\mathbf{g})}{2}\cos\frac{\beta(\mathbf{g})}{2}\cos\left(\gamma(\mathbf{g})+\frac{\alpha(\mathbf{g})-\beta(\mathbf{g})}{2}\right)\Big)$.

Величина случайной ошибки – дисперсия стохастической меры информативности характеризует степень устойчивости меры информативности кривой к зашумлению кривой. Можно поставить задачу о нахождении полигонального представления фиксированной мощности $A\in 2^{\mathrm{B}}$, $|A|=k$, минимизирующего величину дисперсии стохастической меры информативности по длине. Из теоремы 3.3 следует, что при небольшой интенсивности зашумления σ решением указанной задачи будет полигональное представление $A=\arg\min_{A\in 2^{\mathrm{B}},|A|=k} C_2(A,\mathrm{B})$, которое можно считать наиболее устойчивым к зашумлению относительно данной меры информативности.

В разделе 3.3 рассматривается получение минимального полигонального представления кривой методом нечеткой кластеризации. Минимальное полигональное представление кривой должно состоять из тех точек $\mathbf{g}$ кривой Γ, которые обладают высокой информативностью относительно заданного множества признаков $\{\omega_i\}_{i\in I}$. Сами информативности можно считать некоторыми функциями точек кривой: $\omega_i(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}\in\Gamma$, $i\in I$. Предположим, что $\omega_i(\mathbf{g})\in[0,1]$ для всех $\mathbf{g}\in\Gamma$, $i\in I$ и $\omega_i(\mathbf{g})\le\omega_i(\mathbf{h})$, если точка $\mathbf{h}\in\Gamma$ является более информативной, чем точка $\mathbf{g}\in\Gamma$ относительно признака ω_i. Функция $\omega_i(\mathbf{g})$ характеризует степень принадлежности точки $\mathbf{g}$ множеству информативных точек кривой Γ относительно $i-$го признака. Поэтому множество информативных точек кривой Γ относительно $i-$го признака можно рассматривать как нечеткое множество $\{(\mathbf{g},\omega_i(\mathbf{g})),\mathbf{g}\in\Gamma\}$ с функцией принадлежности ω_i. Для некоторого фиксированного значения $\alpha\in[0,1]$ рассмотрим $\alpha-$срез нечеткого множества Γ – множество $\mathrm{B}_\alpha=\{\mathbf{g}\in\Gamma:\ \omega(\mathbf{g})\ge\alpha\}$. Множество B_α является некоторым представлением контура Γ. Необходимо найти такое значение параметра $\alpha\in[0,1]$, чтобы представление B_α было, с одной стороны, минимальным, а с другой - “хорошим”. Рассматривается представление B_α контура Γ, $\alpha\in[0,1]$ с функцией принадлежности $\mu_\alpha^\omega(\mathbf{g})=\begin{cases}\omega(\mathbf{g}), & \mathbf{g}\in\mathrm{B}_\alpha,\\ 0, & \mathbf{g}\notin\mathrm{B}_\alpha.\end{cases}$ Предположим, что универсальное множество – множество точек дискретной кривой Γ – конечное. Для построения идентифицирующего функционала вводится так называемое *нечеткое отношение похожести* на Γ $r(\mathbf{g},\mathbf{h})$, то есть рефлексивное, симметричное нечеткое отношение, удовлетворяющее неравенству $|r(\mathbf{g},\mathbf{h})-r(\mathbf{g},\mathbf{e})|\le 1-r(\mathbf{h},\mathbf{e})$ для всех $\mathbf{e},\mathbf{g},\mathbf{h}\in\Gamma$. Следуя E.H. Ruspini, множество B_α будет *нечетким $r-$представлением множества* Γ*,* если $\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma}r(\mathbf{g},\mathbf{h})\mu_\alpha^\omega(\mathbf{h})\ge\omega(\mathbf{g})$ для всех $\mathbf{g}\in\Gamma$. В разделе 3.3 рассматривается отношение похожести $r(\mathbf{g},\mathbf{h})=1-|\omega(\mathbf{g})-\omega(\mathbf{h})|$. Кроме отношения похожести в задаче нечеткой кластеризации могут быть использованы и другие отношения. Например, желательно, чтобы точки минимального полигонального представления достаточно далеко располагались друг от друга на кривой Γ. Для учета этого требования можно ввести *нечеткое отношение различия*, т.е. симметричное, антирефлексивное нечеткое отношения $\tau(\mathbf{g},\mathbf{h})$, удовлетворяющее условию $|\tau(\mathbf{g},\mathbf{h})-\tau(\mathbf{g},\mathbf{e})|\le\tau(\mathbf{h},\mathbf{e})$ для всех $\mathbf{e},\mathbf{g},\mathbf{h}\in\Gamma$. Заметим, что приведенное здесь определение нечеткого отношения различия согласуется с используемым выше определением нечеткого отношения похожести. Пусть $f(\mathbf{g})$ – функция принадлежности точки $\mathbf{g}\in\Gamma$ множеству информативных точек. Назовем множество $\mathrm{B}_\beta = \{\mathbf{g} \in \Gamma : f(\mathbf{g}) \ge \beta\}$ с функцией принадлежности $\mu_\beta^f(\mathbf{g}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{g} \in \mathrm{B}_\beta, \\ f(\mathbf{g}), & \mathbf{g} \notin \mathrm{B}_\beta \end{cases}$ *нечетким τ – представлением множества* Γ, если $\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma}(1-\tau(\mathbf{g},\mathbf{h}))\left(1-\mu_\beta^f(\mathbf{h})\right) \ge 1-f(\mathbf{g})$ для всех $\mathbf{g} \in \Gamma$. В качестве отношения различия можно использовать функцию $\tau(\mathbf{g},\mathbf{h}) = l(\mathbf{g},\mathbf{h})/L$, где $l(\mathbf{g},\mathbf{h})$ – длина дуги кривой Γ, заключенной между точками $\mathbf{g},\mathbf{h} \in \Gamma$, L – длина кривой Γ. Если в качестве функции принадлежности $f(\mathbf{g})$ взять функцию информативности кривой в данной точке: $f(\mathbf{g}) = \omega_I(\mathbf{g})$, то может быть поставлена задача о нахождении (r,τ) – представления кривой Γ: необходимо найти такое множество B, которое удовлетворяет системе неравенств $\sum_{\mathbf{h}\in\mathrm{B}}\left(1-|\omega_I(\mathbf{g})-\omega_I(\mathbf{h})|\right)\omega_I(\mathbf{h}) \ge \omega_I(\mathbf{g})$, $\sum_{\mathbf{h}\in\Gamma\backslash\mathrm{B}}\left(1-|\omega_L(\mathbf{g})-\omega_L(\mathbf{h})|\right)\left(1-\omega_I(\mathbf{h})\right) \ge 1-\omega_I(\mathbf{g})$ для всех $\mathbf{g}\in\Gamma$. В работе предложен алгоритм нахождения (r,τ) – представления. Доказаны достаточные условия, при выполнении которых алгоритм находит оптимальное решение.

В разделе 3.4 исследуется зависимость изменения характеристик центроидного представления при небольшой вариации координат и информативности контрольных точек. Под *устойчивым векторным представлением* или *описанием* будем понимать такое представление (описание), вектора (значения) которого непрерывно и равностепенно по числу точек зависят от векторов информативности контрольных точек. Точнее, если $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i)_{i=0}^{n-1}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (\tilde{\omega}_i)_{i=0}^{n-1}$ – два вектора информативности контрольных точек, а $\mathbf{v} = (v_i)_{i=0}^{m-1}$, $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_i)_{i=0}^{m-1}$- соответствующие векторы представления ($m \le n$), то существует такая константа c, не зависящая от $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ и числа контрольных точек n, что $\|\mathbf{v}-\tilde{\mathbf{v}}\|_1 \le c\|\boldsymbol{\omega}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}\|_2$.

Пусть $\mathrm{B} = (\mathbf{g}_k)_{k=0}^{n-1}$, $\mathbf{g}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j}$, $k = 0,\dots,n-1$, – множество контрольных точек кривой, имеющих большую информативность, т.е. $\omega_k = \omega(\mathbf{g}_k) \ge h$, $k = 0,\dots,n-1$, где $h > 0$ – некоторое пороговое значение. Обозначим через $\mathbf{x}_h = (x_i)_{i=0}^{n-1}$, $\mathbf{y}_h = (y_i)_{i=0}^{n-1}$, $\boldsymbol{\omega}_h = (\omega_i)_{i=0}^{n-1}$. Тройку $(\mathbf{x}_h, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\omega}_h)$ назовем *скелетом* кривой. Рассмотрим векторное представление $I_h = \{\boldsymbol{\rho}_h, \mathbf{c}_h, \boldsymbol{\omega}_h; \mathbf{o}_h\}$, где $\mathbf{o}_h = x_c\mathbf{i} + y_c\mathbf{j}$, $x_c = \sum_{i=0}^{n-1}x_i\omega_i \Big/ \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i$, $y_c = \sum_{i=0}^{n-1}y_i\omega_i \Big/ \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i$ – центр масс скелета $(\mathbf{x}_h, \mathbf{y}_h, \boldsymbol{\omega}_h)$; $\boldsymbol{\rho}_h = (\rho_i)_{i=0}^{n-1}$, $\rho_i = d(\mathbf{g}_i, \mathbf{o}_h)$, $i = 0,\dots,n-1$, – вектор длин радиус-векторов контрольных точек относительно центра масс $\mathbf{o}_h$ ($d(\mathbf{g},\mathbf{h})$ – расстояние между точками $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$); $\mathbf{c}_h = (c_i)_{i=0}^{n-1}$, $c_i = \cos\gamma_i$, $\gamma_i = \angle\mathbf{g}_i\mathbf{o}_h\mathbf{g}_{i+1}$ ($i = 0,\dots,n-1$, $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}_0$) – вектор косинусов углов между соседними радиус-векторами контрольных точек.

В этом разделе сформулирован ряд результатов об изменении центра масс векторного представления, векторных характеристик $\boldsymbol{\rho}_h$ и $\mathbf{c}_h$, дескриптора Фурье этих характеристик при добавлении к скелету кривой новых контрольных точек или при изменении информативности $\boldsymbol{\omega}_h$ этих точек. Например, если T_1 (T_2) – отображение, устанавливающее соответствие между компонентами исходного вектора $\boldsymbol{\rho}_h = (\rho_i)_{i=0}^{n-1}$ ($\mathbf{c}_h = (c_i)_{i=0}^{n-1}$) и вектором характеристик $\boldsymbol{\rho}'_h = (\rho'_i)_{i=0}^{n-1}$ ($\mathbf{c}'_h = (c'_i)_{i=0}^{n-1}$), полученного после добавления в скелет новых контрольных точек, то справедлива теорема.

Теорема 3.7. *1)* $\|T_1(\boldsymbol{\rho}_h) - \boldsymbol{\rho}_h\|_2 \le d(\mathbf{o}_h, \mathbf{o}'_h)\sqrt{n}$; *2) если* $\rho_i > d(\mathbf{o}_h, \mathbf{o}'_h)$, $i = 0,\dots,n-1$, *то* $\|T_2(\mathbf{c}_h) - \mathbf{c}_h\|_2 \le \frac{24}{24-\pi^2} d(\mathbf{o}_h, \mathbf{o}'_h)\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(\rho_i^{-1} + \rho_{i+1}^{-1})^2}$, *где* $\rho_i = d(\mathbf{g}_i, \mathbf{o}_h)$, $i = 0,\dots,n-1$.

Следствие 3.11. *Если к векторному представлению* I_h *добавляются новые контрольные точки* $\mathbf{g}'_1,...,\mathbf{g}'_l$, *то 1)* $\left\|T_1(\boldsymbol{\rho}_h)-\boldsymbol{\rho}_h\right\|_2 \le \frac{l\sqrt{n}}{h(n+l)} \max\limits_{1\le k\le l} d(\mathbf{o}_h,\mathbf{g}'_k)$;

$$\text{2) } \left\|T_2(\mathbf{c}_h)-\mathbf{c}_h\right\|_2 \le \frac{24l}{h(n+l)(24-\pi^2)} \max_{1\le k\le l} d(\mathbf{o}_h,\mathbf{g}'_k)\sqrt{\sum\nolimits_{i=0}^{n-1}(\rho_i^{-1}+\rho_{i+1}^{-1})^2}\,.$$

Следствие 3.12. *Если имеются скелеты* $\left(\mathbf{x}_h,\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\omega}_h\right)$ *и* $\left(\mathbf{x}_h,\mathbf{y}_h,\boldsymbol{\omega}'_h\right)$, *то*

$$\left\|T_1(\boldsymbol{\rho}_h)-\boldsymbol{\rho}_h\right\|_2 \le \frac{1}{h_1\sqrt{n}}\left\|\boldsymbol{\rho}_h\right\|_\infty \left\|\boldsymbol{\omega}'_h-\boldsymbol{\omega}_h\right\|_1;\ \left\|T_2(\mathbf{c}_h)-\mathbf{c}_h\right\|_2 \le \frac{24}{h_1\sqrt{n}(24-\pi^2)}\left\|\boldsymbol{\omega}'_h-\boldsymbol{\omega}_h\right\|_1 \left\|\boldsymbol{\rho}_h\right\|_\infty \max_{0\le i\le n-1}(\rho_i^{-1}+\rho_{i+1}^{-1}).$$

В разделе 3.5 оцениваются вероятности уклонения центров масс векторного представления при целочисленном одномерном зашумлении кривой.

Теорема 3.9. *Пусть* $S=\left(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{v}_m^{(1)}\right)$ *– скелет оцифрованной кривой* $\Gamma\in C_{c,z}(\tau)$, *где веса* $\mathbf{v}_m^{(1)}=(v_m^{(1)}(\mathbf{g}))_{\mathbf{g}\in S}$, $v_m^{(1)}(\mathbf{g})\ge h$, $\mathbf{g}\in S$, *вычислены в окрестности* $U_m(\mathbf{g})$ *методом геометрического сглаживания,* $h\ge\frac{2l}{m+l}$, $l<m$. *Если* $\tilde{S}=\left(\mathbf{x},\mathbf{Y},\mathbf{V}_m^{(1)}\right)$ *– случайный скелет кривой при зашумлении* $\mathcal{N}_{z,1}^{(0)}\left(\tau,\sigma\right)$, $\mathbf{o},\tilde{\mathbf{o}}$ *– центры масс скелетов* S *и* $\tilde{S}$ *соответственно, а* $\varepsilon>0$, $m>l$ *такие, что* $\frac{(\varepsilon-l)h_1}{\rho(S)}>\frac{1}{m^2}\boldsymbol{\sigma}[\mu_m(\tilde{\Gamma})]\left(\frac{2-h}{2+h}\boldsymbol{\sigma}[\mu_m(\tilde{\Gamma})]+1\right)$, *где* $h_1=\frac{2}{3}\left(\frac{h}{2-h}-\frac{l}{m}\right)$, *то*

$$P\left\{d(\mathbf{o},\tilde{\mathbf{o}})\ge\varepsilon\right\}\le 1-\sum\nolimits_{s=0}^{l} q_s\left(1-\boldsymbol{\sigma}^2[\mu_m(\tilde{\Gamma})]\left(\frac{m^2(\varepsilon-s)h_1}{\rho(S)}-\frac{2-h}{2+h}\boldsymbol{\sigma}^2[\mu_m(\tilde{\Gamma})]\right)^{-2}\right)^{|S|},$$

где $q_s=\sum\nolimits_{\substack{m_{-s}+...+m_s=n,\\ m_{-s}+m_s\ne 0}}\frac{n!}{m_{-s}!...m_s!}p_{-s}^{m_{-s}}...p_s^{m_s}$, $s=0,...,l$.

Четвертая глава посвящена развитию математического аппарата, связанного с измерением количества такого типа неопределенности как неточность. При этом будем придерживаться неопределенностно-обусловленного подхода в теории информации, появившегося в начале 80-х годов прошлого века в работах R.R. Yager, U. Hohle, M. Higashi, G.J. Klir и др. Если X – некоторое конечное множество взаимно исключающих альтернатив, то функция неточности $g(A)$, характеризует ту или иную (в зависимости от конкретной теории неточности) качественную степень того, что истинная альтернатива содержится во множестве альтернатив $A\subseteq X$. Например, так называемая примитивная мера доверия, т.е. мера вида $\eta_{\langle B\rangle}(A)=\begin{cases}1, & B\subseteq A,\\ 0, & B\subsetneq A,\end{cases}$ $A,B\subseteq X$, $B\ne\varnothing$, характеризует степень доверия того, что множество A содержит истинную альтернативу, если известно, что все возможные альтернативы составляют множество B. В свою очередь, примитивная мера правдоподобия $\tau_{\langle B\rangle}(A)=\begin{cases}1, & A\cap B\ne\varnothing,\\ 0, & A\cap B=\varnothing,\end{cases}$ $A,B\subseteq X$, $B\ne\varnothing$, характеризует степень правдоподобия того, что множество A может содержать истинную альтернативу. Функция неточности характеризует качественную степень принадлежности истинной альтернативы рассматриваемому множеству с некоторой неточностью. Поэтому в каждой теории неточности должен быть обоснован выбор функционала v (называемый индексом неточности), с помощью которого для каждой функции g этой теории вычисляется количество неточности, связанной с g. В теории возможностей, как показал Хартли в 1928 году, для измерения количества неточности, связанной с выбором множества альтернатив из некоторого подмножества B (такая неточность называется *неспецифичностью*), следует использовать функционал $H\left(\eta_{\langle B\rangle}\right)=\log_2|B|$, называемый *мерой Хартли.* Для измерения количества неопределенности, задаваемой вероятностной мерой p (такой тип неточности называют *конфликтом*), используют функционал, известный с 1948 года в теории информации как энтропия Шэннона $S(p) = -\sum_{x\in X} p(x)\log_2 p(x)$. Позднее появились обобщения классических теорий возможностей и вероятностей. Поэтому возникла задача исследования таких обобщений классических мер неопределенности, которые с одной стороны наследовали бы основные свойства меры Хартли и энтропии Шэннона, а с другой стороны отражали бы специфику той или иной теории неточных вероятностей. Наиболее популярным обобщением классической теории возможностей является теория свидетельств (теория Демпстера-Шефера). Основным объектом исследования этой теории является так называемая *функция (мера) доверия*, которая может быть представлена в виде $g = \sum_{B\subseteq X} m(B)\eta_{\langle B\rangle}$, где функция множеств m (так называемое *основное вероятностное назначение*) такова, что $m(\varnothing) = 0$, $m(B) \geq 0$ для всех $B \in 2^X$, и $\sum_{B\subseteq X} m(B) = 1$. В классе всех функций доверия $Bel(X)$ для измерения количества неточности D. Dubois и H. Prade предложили использовать меру $GH(g) = \sum_{B\in 2^X\setminus\{\varnothing\}} m(B)\log_2|B|$, которая является *обобщением меры Хартли*. Пусть $\bar{g}(B) = 1 - g(\bar{B})$, $B \in 2^X$, – двойственная мера к мере g, $\Pr(X)$ - множество всех вероятностных мер на X, $M_0(X)$ – множество всех монотонных нормированных мер на X, т.е. $g \in M_0(X)$, если 1) $g(\varnothing) = 0$, $g(X) = 1$; 2) из $A \subseteq B$ следует, что $g(A) \leq g(B)$, $A, B \in 2^X$. Класс мер, двойственных к мерам доверия называют классом *мер правдоподобия* и обозначают $Pl(X)$. Аксиоматика индекосв неточности на множетсве мер доверия рассматривалась в работах G.J. Klir, D. Harmanec, А.Г. Броневича.

В данной главе в качестве функций неточности рассматриваются, в основном, так называемые нижние и верхние вероятности, которые можно считать нижними и верхними огибающими некоторого семейства вероятностных мер. Точнее, монотонная нормированная мера $g \in M_0(X)$ называется нижней (верхней) вероятностью, если существует вероятностная мера $p \in \Pr(X)$ такая, что $g(A) \leq p(A)$ ($g(A) \geq p(A)$) для всех $A \in 2^X$. Множество всех нижних (верхних) вероятностей будем обозначать через $M_{low}(X)$ ($M_{up}(X)$), а через $M(X)$ – множество всех или нижних или верхних вероятностей.

Определение 4.1. *Индексом неточности на множестве $M(X)$ назовем функционал $\nu: M(X) \to R$, удовлетворяющий свойствам: 1) $\nu(g) = 0$, если $g \in \Pr(X)$; 2) $\nu(g_1) \geq \nu(g_2)$ ($\nu(g_1) \leq \nu(g_2)$) для всех $g_1, g_2 \in M_{low}(X)$ ($g_1, g_2 \in M_{up}(X)$) таких, что $g_1 \leq g_2$; 3) $\nu(\eta_{\langle X\rangle}) = 1$ ($\nu(\tau_{\langle X\rangle}) = 1$).*

Простейший индекс неточности можно определить с помощью разности сопряженных мер: если $B \in 2^X$, то $\nu_B(g) = |\bar{g}(B) - g(B)|$ – индекс неточности на $M(X)$.

Определение 4.3. *Назовем индекс неточности $\nu \in I(M(X))$ линейным на $M(X)$, если для любого множества $\{g_j\}_{j=1}^k \subset M(X)$ и любых таких чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^k$, что $\sum_{j=1}^k \alpha_j g_j \in M(X)$ справедливо равенство $\nu\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j g_j\right) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \nu\left(g_j\right)$.*

Через $I_0(M(X))$ обозначим класс всех линейных индексов неточности на $M(X)$. Пусть m_g и m^g – преобразование и двойственное преобразования Мебиуса меры g соответственно, т.е. $m_g(D) = \sum_{A\subseteq D} (-1)^{|D\setminus A|} g(A)$, $g(B) = \sum_{D\in 2^X\setminus\varnothing} m_g(D)\eta_{\langle D\rangle}(B)$, $B, D \in 2^X$, $m^g(D) = \sum_{D\subseteq A} (-1)^{|A\setminus D|} g(A)$, $g(B) = \sum_{D\subseteq X} m^g(D)\eta_{\langle B\rangle}(D)$, $B, D \in 2^X$, $B \neq \varnothing$. Для положительного линейного функционала через $\mu_f(B) = f\left(\eta_{\langle B\rangle}\right)$ обозначим так называемую *дескриптивную меру*.

Теорема 4.1. *Положительный линейный функционал* $f \in I_0(M_{low}(X))$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия: а)* $\sum_{D:\, x\in D} m^{\mu_f}(D) = 0$ *для всех* $x \in X$; *б)* $m^{\mu_f}(X) = 1$; *в)* $m^{\mu_f}(D) \le 0$ *для всех* $D \in 2^X \setminus \{\varnothing, X\}$.

Следствие 4.2. *Любой линейный индекс неточности* f *на множестве* $M_{low}(X)$ *можно представить в виде* $f(g) = 1 - \sum_{D\subseteq X} q(D)g(D)$, *где функция множеств* q *удовлетворяет условиям: 1)* $q(\varnothing) = q(X) = 0$; *2)* $q(D) \ge 0$ *для всех* $D \in 2^X$; *3)* $\sum_{D:\, x\in D} q(D) = 1$ *для всех* $x \in X$. *Причем это представление единственно.*

Теорема 4.2. *Положительный линейный функционал* $f \in I_0(M_{low}(X))$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия: а)* $\alpha\mu_f + \beta\tau_{\langle X\rangle} \in Pl(X)$, *где* $\alpha + \beta = 1$, $\alpha > 0$, $\beta \ge \alpha \sum_{A\subseteq X} (-1)^{|A|} \mu_f(A)$; *б)* $\mu_f(\{x\}) = 0$ *для всех* $x \in X$.

Используя приведенные выше результаты, нетрудно доказать, что нормированная обобщенная мера Хартли $GH^0(g) = \sum_{A\in 2^X\setminus\varnothing} m_g(A)\log_{|X|}|A| \in I_0(M_{low}(X))$.

Определение 4.4. *Линейный индекс неточности* ν *на* $M(X)$ *назовем симметричным по дополнению, если* $m^{\mu_\nu}(D) = m^{\mu_\nu}(\bar{D})$ *для любого* $D \in 2^X \setminus \{\varnothing, X\}$.

Через $I_s(M(X))$ обозначим класс всех симметричных по дополнению индексов неточности на $M(X)$.

Теорема 4.3. *Положительный линейный функционал* $\nu \in I_s(M(X))$ *тогда и только тогда, когда* $\nu = \sum_{D\in 2^X\setminus\{\varnothing,X\}} \alpha_\nu(D)\nu_D$, *где* $\alpha_\nu(D) \ge 0$ *для всех* $D \in 2^X \setminus \{\varnothing, X\}$ *и* $\sum_{D\in 2^X\setminus\{\varnothing,X\}} \alpha_\nu(D) = 1$.

Пусть $2^X \setminus \{\varnothing, X\} = \mathcal{D} \cup \bar{\mathcal{D}}$ *прямое разбиение* алгебры 2^X: $\mathcal{D} \cap \bar{\mathcal{D}} = \varnothing$ и $A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \bar{A} \in \bar{\mathcal{D}}$.

Предложение 4.9. *Множество всех крайних точек (крайнее множество) выпуклого множества* $I_s(M(X))$ *состоит из множества всех простейших индексов неточности* $\{\nu_A : A \in \mathcal{D}\}$ *для некоторого прямого разбиения* $\mathcal{D}$.

Показано, что для нижних вероятностей вида $g(A) = \min\{p_1(A), p_2(A)\}$, $A \in 2^X$, $p_1, p_2 \in \Pr(X)$, линейный симметричный индекс неточности имеет смысл расстояния между вероятностными мерами p_1 и p_2. В общем случае, для нижней (верхней) огибающей семейства вероятностных мер, линейный симметричный индекс неточности имеет смысл диаметра множества вероятностных мер.

Далее в этой главе рассматривается продолжение индекса неточности на множество всех монотонных нормированных мер $M_0(X)$. Для корректного продолжения индекса неточности на $M_0(X)$ необходимо выделить два типа неопределенности, которые можно описать с помощью монотонных мер - неточность и противоречивость. Считая, что точное описание недетерминистской системы может быть осуществлено с помощью вероятностной меры, под неточностью будем понимать неопределенность описания недетерминистской системы, связанную с интервальным оцениванием вероятностного описания. Под противоречивостью будем понимать неопределенность, которую нельзя связать с интервальными оценками точного вероятностного описания. Любая мера $g \in M_{low}(X) \cup M_{up}(X)$

определяет неточность описания системы вероятностной мерой. Если же $g\in M_0(X)\setminus\left(M_{low}(X)\cup M_{up}(X)\right)$, то информация, задаваемая мерой g, для некоторых множеств альтернатив будет противоречивой. Предположим, что для измерения количества неточности мы используем индекс неточности $f\in I(M_{low}(X))$. Тогда количество неточности в этой мере $g\in M_0(X)$, рассматриваемой в качестве нижней оценки вероятностной меры, может быть вычислено с помощью функционала $f_{\mathrm{Imp}}(g)=\inf\left\{f(\mu):\mu\in M_{low}(X),\ \mu\le g\right\}$. Аналогично, можно ввести индекс противоречивости $f_{\mathrm{Inc}}(g)$ меры $g\in M_0(X)$, рассматриваемой в качестве нижней оценки вероятностной меры, по формуле $f_{\mathrm{Inc}}(g)=\inf\left\{f(\overline{\mu}):\mu\in M_{up}(X),\mu\ge g\right\}$.

Лемма 4.5. *Справедливы равенства: 1)* $f_{\mathrm{Imp}}(g)=\inf\left\{f(\min(p,g)):p\in\Pr(X)\right\}$*;* *2)* $f_{\mathrm{Inc}}(g)=\inf\left\{f(\min(p,\overline{g})):p\in\Pr(X)\right\}$.

В некоторых случаях мы не знаем, какой оценкой вероятности является монотонная мера $g\in M_0(X)$: верхней или нижней? Ответ на этот вопрос можно дать, проанализировав значения индексов неточности и противоречивости этой меры. Например, если индексы неточности и противоречивости $f_{\mathrm{Imp}}(g)$ и $f_{\mathrm{Inc}}(g)$ соответственно построены с помощью функционала $f\in I(M_{low}(X))$, то меру g следует считать нижней оценкой вероятности, если $f_{\mathrm{Imp}}(g)>f_{\mathrm{Inc}}(g)$ (т.е. количества неточности в этой мере больше количества противоречивости) и верхней оценкой вероятности – в противном случае. Другими словами, если для функционала $f_S(g)=f_{\mathrm{Imp}}(g)-f_{\mathrm{Inc}}(g)$ верно неравенство $f_S(g)>0$, то мера g – скорее нижняя оценка вероятности, чем верхняя.

Предложение 4.10. *Если* $f\in I_s(M_{low}(X))$*, то* $f_S(g)=f(g)$ *для всех* $g\in M_0(X)$.

В этой же главе рассматриваются применения индексов неточности к оцениванию априорной информативности недетерминистских систем, в частности, полигональных представлений кривых.

<u>В пятой главе</u> рассматривается задача аппроксимации мер доверия вероятностными мерами. В теории неточных вероятностей существует две различных постановки задачи аппроксимации. Первая постановка связана с нижней (верхней) аппроксимацией монотонных мер более «простыми» мерами, «близкими» к вероятностным мерам. Такими мерами в первую очередь являются 2-монотонные меры (емкости Шоке), k-аддитивные меры и др. Необходимость аппроксимации нижних вероятностей 2-монотонными мерами обусловлена важными приложениями этой задачи в теории проверки статистических гипотез (теорема Хьюбера-Штрассена). Задача верхней (нижней) аппроксимации монотонных мер вероятностными мерами рассматривалась в работах A. Chateauneuf, J.Y. Jaffray и M. Grabisch.

Другая постановка задачи аппроксимации в теории неточных вероятностей связана с нахождением для заданной монотонной меры такой более «простой» меры, которая минимизировала бы некоторый критерий невязки между двумя мерами. Такая постановка находит применение в коалиционной теории игр. Кроме того, задача нахождения «ближайшей» меры к заданной нижней вероятности может иметь приложения в ранжировании возможностей появления того или иного события в тех случаях, когда на основании неточных вероятностей этого сделать нельзя (например, нижние и верхние оценки вероятностей появления нескольких событий – одинаковы). В работах P.L. Hammer, R. Holzman и E. Boros рассматривалась задача безусловной псевдобулевой оптимизации функций множеств многочленами заданного порядка. В этой главе рассматривается вторая постановка задачи аппроксимации в классе мер доверия.

Пусть X – конечное множество, $M_0(X)$ – множество всех монотонных нормированных мер на алгебре 2^X, $\eta_i = \eta_{\langle\{x_i\}\rangle}$, $x_i \in X$, и $\xi_k(A) = \eta_k(A) - \frac{1}{n}|A|$, $k = 1,...,n$, $A \subseteq X$. С нижней вероятностью g можно связать функцию множеств $\rho_g = \frac{1}{2}(g + \overline{g})$ – средняя часть неточности, задаваемой парой $(g, \overline{g})$.

Теорема 5.1. *Для любой меры доверия* $g \in Bel(X)$ *существует единственная вероятностная мера* p_g *такая, что норма* $\left\|p_g - \rho_g\right\|_2$ *будет минимальной, причем* $p_g = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(g)\eta_k$, где $\alpha_k(g) = p_g\left(\{x_k\}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{A \subseteq X} \rho_g(A)\xi_k(A)$, $x_k \in X$, $k = 1,...,n$.

Следствие 5.2. *При тех же условиях, что и в теореме 5.1 справедливы равенства* $\left\|p_g - g\right\|_2 = \min\left\{\left\|p - g\right\|_2 : p \in \Pr(X)\right\}$, $\left\|p_g - \overline{g}\right\|_2 = \min\left\{\left\|p - \overline{g}\right\|_2 : p \in \Pr(X)\right\}$.

Отдельно рассматривается задача вероятностной аппроксимации симметричных мер доверия.

Определение 5.1. *Меру доверия* g *назовем симметричной, если из* $|B| = |C|$ *следует, что* $m_g(B) = m_g(C)$.

Пусть p_0 – равновероятная мера ($p_0\left(\{x\}\right) = 1/|X|$ для всех $x \in X$).

Предложение 5.5. *Если* $g \in Bel_0(X)$*, то* $g \leq p_g = p_0$.

Ближайшую меру можно рассматривать как результат действия линейного преобразования и преобразования сдвига на меру доверия. Линейное преобразование будем называть преобразованием ближайшей меры. Саму ближайшую меру тогда можно записать в виде $p_g = p_0 + L_K[g]$, $L_K[g]$ – линейный оператор, определенный на линейном пространстве всех функций множеств g ($g(\varnothing) = 0$) с матрицей $\mathbf{K}$: $K(A,B) = \xi(A,B)/2^{n-2}$,

Лемма 5.4. *Оператор* L_K *имеет собственные значения* $\lambda_1 = 1$ *и* $\lambda_2 = 0$ *геометрической (и алгебраической) кратности* $|X| - 1$ *и* $2^{|X|} - |X|$ *соответственно.*

В этой главе решается и обратная задача: для заданной вероятностной меры p требуется найти множество $Bel_p(X)$ всех таких мер доверия, которые наименее уклонялись бы в среднеквадратичном от заданной вероятности p, т.е. $Bel_p(X) \subseteq Bel(X)$ и $p_g = p$ для всех $g \in Bel_p(X)$.

Теорема 5.2. *Класс* $Bel_p(X)$ *состоит из функций множеств* $g = \sum_{B \subseteq X} m(B)\eta_{\langle B\rangle}$*, где числа* $m(B)$*,* $B \in 2^X$*, удовлетворяет условиям: 1)* $m(B) \geq 0$*,* $B \in 2^X$*; 2)* $\sum_{B \subseteq X} m(B) = 1$*; 3)* $\sum_{B \subseteq X} m(B)\xi_i(B)/2^{|B|-1} = p(\{x_i\}) - |X|^{-1}$*,* $i = 1,...,|X| - 1$.

Кроме того, решается задача нахождения крайних точек множества $Bel_p(X)$. Пусть $\mathcal{R}(X)$ – множество всех разбиений множества X.

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathcal{B} \in \mathcal{R}(X)$ *и* $m(B) = 2^{|B|}/\sum_{A \in \mathcal{B}} 2^{|A|}$*,* $B \in \mathcal{B}$*. Тогда* $g_{\mathcal{B}} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m(B)\eta_{\langle B\rangle}$ *и* $g_{\overline{\mathcal{B}}} = \sum_{B \in \mathcal{B}} m(\overline{B})\eta_{\langle\overline{B}\rangle}$ *– экстремальные меры класса* $Bel_{p_0}(X)$.

Алгебраическое описание класса $Bel_p(X)$ применено к решению задачи оценивания выигрышей коалиций игроков при заданных полезностях отдельных игроков.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Исследован локально-интерполяционный подход к оцениванию кривизны плоской кривой. Оценены систематическая погрешность, смещение и случайная ошибка оценки кривизны при некоррелированном нормальном зашумлении кривой.

2. Разработан и исследован метод усреднения локально-интерполяционных оценок. Найдены оптимальные значения параметров метода. Исследовано вычисление оценки кривизны с помощью свертки первичных локально-интерполяционных оценок со сглаживающим ядром. Оценены смещение и случайная ошибка оценки кривизны, полученная методом сглаживания локально-интерполяционных оценок. Найдены оптимальные значения параметров метода.

3. Исследован локально-аппроксимативный подход к оцениванию кривизны плоской кривой. Найдены значения систематической и случайной ошибок оценки кривизны, полученной локально-аппроксимативным методом при некоррелированном нормальном зашумлении кривой. Разработан и исследован метод геометрического сглаживания как модельный метод неявного локально-аппроксимативного подхода к оцениванию кривизны. Найдены систематические ошибки, смещения и случайные ошибки оценок кривизны, полученных этим методом для различных моделей зашумления кривой.

4. Введен и исследован класс усредненных мер информативности по кривизне. Определена усредненная функция информативности кривой относительно данного локального признака изображения. Исследован класс стохастических аддитивных усредненных мер информативности в случае вероятностного зашумления кривой. Решена задача нахождения полигонального представления кривой, ограниченной мощности, минимизирующего дисперсию стохастической меры информативности.

5. Исследована неаддитивная (монотонная) усредненная стохастическая мера информативности, в частности мера информативности по длине при аддитивном стационарном некоррелированном нормальном зашумлении дискретной кривой. Найдены асимптотические выражения для величины смещения и случайной ошибки стохастической меры информативности по длине. Поставлена и решена задача нахождения полигонального представления, наиболее устойчивого относительно меры информативности по длине.

6. Поставлена и исследована задача нахождения полигонального представления кривой, состоящего из всех таких точек, информативные признаки которых удовлетворяют определенным нечетким отношениям близости и различия.

7. Оценены величины изменения векторных характеристик представлений и описаний дискретной кривой при изменении информативности контрольных точек. Получены вероятностные оценки изменения центра масс векторного представления кривой, подвергнутой стационарному некоррелированному зашумлению.

8. В рамках исследования степени неточности мер информативности, аксиоматически введены и описаны в терминах свойств дескриптивных мер линейные индексы неточности в классе нижних (верхних) вероятностей. Исследован важный выпуклый класс так называемых симметричных по дополнению индексов неточности. Найдено алгебраическое описание этого класса. Предложен один способ продолжения индекса неточности на множество всех монотонных мер. Рассмотрен индекс неточности меры информативности по длине.

9. Решена задача аппроксимации меры доверия вероятностной мерой, минимизирующей среднеквадратичную невязку. Получены различные представления ближайшей вероятностной меры. Исследованы алгебраические, спектральные и аппроксимативные свойства преобразования, ставящего в соответствие мере доверия ближайшую в среднеквадратичном вероятностную меру. Решена обратная задача вероятностной аппроксимации: найдено множество тех мер доверия, для которых заданная вероятностная мера явля-

ется ближайшей в среднеквадратичном. Найдено семейство экстремальных точек выпуклого класса ближайших мер доверия, рассмотрены некоторые применения найденных описаний в теории игр.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в перечень ВАК

1. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е., Безуглов А.В. Об одном способе векторного и аналитического представления контура изображения // Изв. ТРТУ. "Материалы Всерос. научно-техн. конф. "Интел. САПР-97", Таганрог: ТРТУ, №2(8), 1998, с.107-111.
2. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Оценивание кривизны точек плоского зашумленного контура. Некоторые вероятностные модели // Изв. ТРТУ. "Материалы Всерос. научно-техн. конф. "Интел. САПР-98", Таганрог: ТРТУ, №3(13), 1999, с.194-197.
3. Лепский А.Е. Оценка числовых характеристик случайного веса в одномерной модели зашумления контура плоского изображения // Изв. ТРТУ. "Материалы Всерос. научно-техн. конф. "Интел. САПР-98", Таганрог: ТРТУ, №3(13), 1999, с.197-200.
4. Лепский А.Е. Об оценивании кривизны плоского зашумленного контура // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М.: изд-во ТВП, Т.6., В.1, 1999, с.171.
5. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Аксиоматический подход в определении полигонального представления контура изображения // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М.: изд-во ТВП, Т.7., вып.2, 2000, с.322-323.
6. Лепский А.Е. Оценка вероятности уклонения центроида полигонального представления плоского зашумленного контура // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М; изд-во ТВП, Т.7., 2000, с.379-380.
7. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Об устойчивости центра масс, векторов и дескриптора Фурье векторного представления контура изображения // Автоматика и телемеханика, №3, 2001, с.141-151.
8. Лепский А.Е. О систематической ошибке оценивания кривизны контура методом аналитического сглаживания // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М.: изд-во ТВП, Т.8. вып.1, 2001, с.254-255.
9. Лепский А.Е. Об аппроксимации одного класса бета-распределений нормальным законом // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М.; изд-во ТВП, Т.8. вып.2, 2001, с.633-634.
10. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Операторы свертки нечетких мер // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М.: изд-во ТВП, Т.8. вып.2, 2001, с.748-749.
11. Броневич А.Г., Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Разности функций множеств // Обозрение прикладной и пром. мат-ки, М.: изд-во ТВП, Т.9. вып.1, 2002, с.117-118.
12. Каркищенко А.Н., Броневич А.Г., Лепский А.Е. Неаддитивные меры: приложения к обработке информации с высокой неопределенностью // Вестник Южного научного центра РАН, т.1, вып.3, 2005, с.90–95.
13. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Аксиоматический подход к задаче нахождения оптимального полигонального представления контура // Интеллектуальные системы, т. 9, вып.1-4, 2005, с.121-134.
14. Лепский А.Е. Об устойчивости центра масс векторного представления в одной вероятностной модели зашумления контура изображения // Автоматика и телемеханика, №1, 2007, с.82-92.
15. Лепский А.Е. Оптимальное проецирование нижних вероятностей на семейство вероятностных мер // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения, №3, 2007, с.139-143.

16. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Индекс неточности и его применение к оцениванию априорной информативности систем // Известия РАН. ТиСУ, №1, 2008, с.94-100.
17. Лепский А.Е. Симметричный линейный индекс неточности в классе нижних вероятностей // Известия РАН. ТиСУ, №2, 2008, с.35-42.

Материалы и тезисы докладов конференций, статьи в сборниках, журналах

18. Лепский А.Е. Кривизна и вес точки контура плоского изображения объекта // Материалы Всерос. науч.-техн. конф. с междун. участием "Компьютерные технологии в инж. и управл. деятельности", ТРТУ, Таганрог, 1999, с.21-22.
19. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Два подхода к получению минимального полигонального представления контура // Тезисы докл. междун. науч. конф. «Искусственный интеллект-2000», п. Кацивели, Крым, 2000, с.173-175.
20. Лепский А.Е., Бачило С.А., Рыбаков О.С. Оптимальный выбор параметров в задаче оценивания кривизны контура в одной вероятностной задаче зашумления изображения // VI Междун. конф. «Радиолокация, навигация, связь», Т.2. Воронеж, 2000, с.859-863.
21. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Некоторые эффективные подходы к распознаванию изображений трехмерных объектов по внешнему контуру // В сб. трудов Седьмой нац. конф. по искусств. интеллекту с междун. участием КИИ-2000, т.2, Переславль-Залесский, 2000, с.557-565.
22. Лепский А.Е. О нахождении минимального представления контура изображения как решение задачи нечеткой кластеризации // Сб. трудов Междун. конф. по мягким вычислениям и измерениям SCM-2000, т.1, Санкт Петербург, 2000, с.190-193.
23. Лепский А.Е., Бачило С.А., Рыбаков О.С. Анализ двух методов оценивания кривизны дискретной плоской зашумленной кривой // Сб. трудов 3-й междун. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение», М., 2000, с.12-14.
24. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Два подхода к получению минимального полигонального представления контура // «Искусственный интеллект», №3, 2000, Донецк, с.421-427.
25. Лепский А.Е. Исследование устойчивости оценок кривизны к уровню зашумления контура // В сб. трудов Междун. конгресса «Искусственный интеллект в XXI веке», т.2, М.: Физматлит, 2001, с.516-524.
26. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Применение теории нечетких мер к оцениванию информативности полигонального представления контура изображения // Сб. трудов Межд. науч.-практич. семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте», М.: Наука, Физматлит, 2001, с.112-116.
27. Лепский А.Е., Броневич А.Г., Бачило С.А. Выделение контрольных точек на основе меры информативности контура // В сб. трудов 4-й междун. конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение», М., 2002, с.288-291.
28. Lepskiy A., Bronevich A., Bachilo S.A. Extraction of control points based on an informative quantity measure // Proc. of the 4-th International Conference “Digital signal processing and its applications”, Moscow, Russia, 2002, p.291.
29. Bronevich A.G., Lepskiy A.E. Operators for convolution of fuzzy measures, Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis // ed.: Przemyslaw Grzegorzewski … - Heidelberg; New-York: Physical-Verl., 2002, pp.84-91.
30. Лепский А.Е. Инвариантные нормы на пространстве кривых // Труды межд. конф. «Искусств. интел. системы» (IEEE AIS’02) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2002). – М.: Физматлит, 2002, с.440-447.
31. Лепский А.Е. Нахождение минимального представления контура изображения как решение задачи нечеткой кластеризации // Известия вузов России. Радиоэлектроника, №1, 2002, с.35-39.

32. Броневич А.Г., Лепский А.Е. Аксиоматический подход к определению индексов неточности нечеткой меры // Сб. трудов 2 междун. научно-практ. Семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте». – М.: Физматлит, 2003, с.127-130.
33. Bronevich A., Lepskiy A. Geometrical fuzzy measures in image processing and pattern recognition // Proc. of the 10th IFSA World Congress, Istanbul, Turkey, 2003, pp.151-154.
34. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Методы вычисления степени неточности в классе нижних вероятностей // В сб. трудов всерос. научной конф. по нечетким системам и мягким вычислениям НСМВ-2006. – М: Физматлит, 2006, с.140-149.
35. Lepskiy A.E. The Linear Imprecision Indices on the Lower Probabilities // Proc. of the 11th IPMU Conference, Paris, 2006, pp.1724-1731.
36. Лепский А.Е. О вероятностной мере, наименее уклоняющейся от симметричной части неточности // Материалы IX Междун. конф. “Интел. системы и компьют. науки”, т.1, ч.2, - М.: Изд-во мех.-матем. фак-та МГУ, 2006, с.172-174.
37. Лепский А.Е. Вероятностная аппроксимация мер доверия // Сб. трудов IV-й Межд. научно-практич. конференции “Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте”. В 2-х томах. т.1. – М.: Физматлит, 2007, с.212-219.
38. Bronevich A., Lepskiy A. Measuring uncertainty with imprecision indices // Proc. of the Fifth International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications (ISIPTA'07), Prague, 2007, pp.47-56.
39. Lepskiy A., Bronevich A. Various representations and algebraic structure of linear imprecision indices // Proc. of the 5th EUSFLAT Conference, Ostrava, Chezh Republic, 2007, v.1, pp.297-304.
40. Гончаров А.В., Горбань А.С., Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Поиск портретных изображений по содержанию // Сб. работ участников конкурса «Интернет-математика 2007». – Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2007, с.56-64.
41. Каркищенко А.Н., Лепский А.Е. Применение понятия информативности в распознавании образов // Материалы восьмой междун. науч.-техн. конф. «Искусственный интеллект. Интеллектуальные системы», Донецк: изд. «Наука i освiта», 2007, с.208-213.
42. Lepskiy A.E. The class of nearest belief functions to a given probability measure // Proc. of the NAFIPS’08, New York, 2008, # 60608.

Личный вклад автора в работах, выполненных в соавторстве, включает:

[1, 2] – предложен метод геометрического сглаживания для оценивания кривизны;
[19, 21, 24] – исследование векторных представлений кривых;
[20, 23] – аналитическое решение задачи оптимального выбора параметров в методе геометрического сглаживания;
[5, 13, 26, 27, 28, 33] – исследование меры информативности по кривизне;
[7] – решение задачи об изменении характеристик центроидного представления при небольшой вариации координат и информативности контрольных точек;
[10, 11, 29] – описание некоторых классов монотонных мер с помощью разностей функций множеств;
[12] – общая постановка задачи оценивания кривизны;
[16, 32, 34, 38, 39] – исследование линейного индекса неточности, определение и исследование симметричного по дополнению индекса неточности;
[40] – выделение информативных точек на изображениях.

Типография ТТИ ЮФУ, ГСП 17А, Таганрог, ул. Энгельса, 1, Заказ №48, Тираж 100 экз.